ЗАТВЕРДЖУЮ
Перший проректор
Прикарпатського національного
університету імені Василя Стефаника
доктор економічних наук, професор
_____ Валентина ЯКУБІВ
26 ____05_____2025 р.

ВИТЯГ
з протоколу №2 від 21 травня 2025 р. фахового семінару
кафедри математичного і функціонального аналізу
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

ПРИСУТНІ:

З кафедри математичного і функціонального аналізу:

- проректор з науково-педагогічної роботи, доктор фізико-математичних наук, професор Шарин С.В.;
- завідувач кафедри математичного і функціонального аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Загороднюк А.В.;
- старший лаборант кафедри математичного і функціонального аналізу Василик О.Я.;
- професор кафедри математичного і функціонального аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Дмитришин Р.І.;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Кравців В.В.;
- професор кафедри математичного і функціонального аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Осипчук М. М.;
- професор кафедри математичного і функціонального аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Василишин Т. В.;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Малицька Г.П.;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Івасюк І.Я. ;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Марцінків М.В.;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Слободян С.Я.

Запрошені з інших установ:

- завідувач кафедри вищої математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка», доктор фізико-математичних наук, професор Філевич П. В.

З присутніх – 6 докторів наук та 5 кандидатів наук – фахівці за профілем представленої дисертації. Головуючий на фаховому семінарі – доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з науково-педагогічної роботи Шарин С. В.

СЛУХАЛИ:

1. Інформацію про дисертацію та здобувача.

Дисертантка Грибель Ольга Богданівна, денної (державної) форми навчання в аспірантурі за спеціальністю 111 Математика. Дисертація на тему «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле», подана на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Тема дисертаційної роботи «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле» затверджена на засіданні Вченої ради Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол №9 від 03.11.2020 року).

Науковим керівником затверджений доктор фізико-математичних наук, професор, професор Філевич Петро Васильович.

2. Виступ здобувачки Грибель Ольги Богданівни.

Актуальність теми. Вивчення асимптотичних оцінок для сум рядів Діріхле є одним із ключо вих напрямів у теорії зростання аналітичних функцій. Зокрема, важливе місце займає задача встановлення умов, за яких модуль суми ряду $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ можна ефективно оцінити через його максимальний член $\mu(\sigma; F)$. Такі оцінки дозволяють описати поведінку функції ln M(σ; F) при наближенні до абсциси абсолютної збіжності та тісно пов'язані з характеристиками зростання функцій, представлених рядами Діріхле.

Класичні методи, зокрема підхід Вімана–Валірона і ймовірнісний метод Розенблума, стали основою для встановлення таких оцінок як для степеневих рядів, так і для рядів Діріхле. Їх розвиток і адаптацію до випадку цілих та абсолютно збіжних рядів здійснено у працях ряду дослідників, що дозволило сформулювати необхідні та достатні умови оцінювання модуля суми ряду через його максимальний член – як зі, так і без урахування виняткових множин.

Особливу роль відіграють узагальнені та модифіковані порядки зростання рядів Діріхле, для яких актуальним є встановлення формул типу Коші–Адамара, що дозволяють пов'язати ці характеристики із послідовністю модулів коефіцієнтів. У низці випадків уже отримано точні умови правильності таких формул, проте багато фундаментальних питань залишаються відкритими, зокрема щодо зменшення обмежень на показники ряду та функції порівняння.

Додаткову актуальність становить проблема побудови рядів, пов'язаних із заданими, але з простішою структурою коефіцієнтів, які дають змогу точніше апроксимувати модуль суми. Це відкриває нові можливості для встановлення глобальних оцінок та аналізу зростання, як у випадку цілих рядів, так і для рядів, абсолютно збіжних у півплощині.

Об'єкт дослідження: цілі та абсолютно збіжні у півплощині ряди Діріхле з невід'ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників.

Предмет дослідження: асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле.

Метою дослідження є опис асимптотичних властивостей суми ряду Діріхле в термінах послідовності його коефіцієнтів.

При цьому розв'язувалися наступні завдання:

1. для кожного цілого ряду Діріхле побудувати пов'язаний з ним ряд Діріхле, коефіцієнти якого виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого цілого ряду Діріхле, а максимальний член у певному сенсі добре апроксимує суму заданого цілого ряду Діріхле;
2. встановити відносні асимптотичні оцінки для суми заданого цілого ряду Діріхле та максимального члена пов'язаного ряду, знайти умови на коефіцієнти довільного цілого ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримати необхідні та достатні умови на коефіцієнти цілого ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми;
3. для кожного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле побудувати пов'язаний з ним ряд Діріхле, коефіцієнти якого виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого ряду, а максимальний член у певному сенсі добре апроксимує суму заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле;
4. встановити відносні асимптотичні оцінки для суми заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле та максимального члена пов'язаного ряду, знайти умови на коефіцієнти довільного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримати необхідні та достатні умови на коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми;
5. обґрунтувати чи спростувати необхідність отриманої П. В. Філевичем та М. М. Шереметою умови одночасної правильної зміни логарифмів супремуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле;
6. знайти формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена ряду Діріхле;
7. дослідити зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле в термінах модифікованих порядків, зокрема, за загальних припущень щодо функцій порівнянь знайти необхідні та достатні умови на показники абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, за яких його модифікований порядок збігається з модифікованим порядком логарифма його максимального члена, і встановити формули для обчислення модифікованого порядку абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле через послідовність модулів його коефіцієнтів.

Оцінки сум цілих рядів Діріхле. Для кожного цілого ряду Діріхле з невід'ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників уведено у розгляд пов'язаний з ним ряд Діріхле і доведено теорему апроксимаційного характеру, що дає в певному сенсі добру оцінку для суми ряду через максимальний член пов'язаного ряду, причому вказана оцінка не залежить від поведінки

послідовності показників ряду Діріхле. Використовуючи цю теорему, встановлено відносні асимптотичні оцінки для суми цілого ряду Діріхле та максимального члена пов'язаного ряду, знайдено умови на коефіцієнти довільного цілого ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримано необхідні та достатні умови на коефіцієнти цілого ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми. Ці результати істотно доповнюють і узагальнюють результати роботи М. М. Шеремети.

Оцінки сум абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле. Для кожного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле з невід'ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників уведено у розгляд два пов'язані з ним ряди Діріхле та доведено теореми апроксимаційного характеру, що дають в певному сенсі добрі оцінки для суми ряду через максимальні члени пов'язаних рядів, причому вказані оцінки не залежать від поведінки послідовності показників ряду Діріхле. Використовуючи ці теореми, встановлено відносні асимптотичні оцінки для суми абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле та максимального члена кожного з пов'язаних рядів, знайдено умови на коефіцієнти довільного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримано необхідні та достатні умови на коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми.

Відносні асимптотичні оцінки для суми ряду Діріхле і його максимального члена. Обґрунтовано необхідність отриманої в роботі П. В. Філевича та М. М. Шеремети умови одночасної правильної зміни логарифмів супремуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле, доведено формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена ряду Діріхле, яка є правильною за загальних припущень щодо послідовності показників цього ряду і функцій порівняння, а також досліджено зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле в термінах модифікованих порядків, зокрема, за доволі загальних припущень щодо функцій порівняння знайдено необхідні та достатні умови на показники ряду Діріхле, за яких його модифікований порядок збігається з модифікованим порядком логарифма його максимального члена, і встановлено формули для обчислення модифікованого порядку ряду Діріхле через послідовність модулів його коефіцієнтів.

В дисертації зроблено наступні висновки:

У дисертаційній роботі розв'язано ряд актуальних задач теорії рядів Діріхле, що стосуються опису асимптотичної поведінки суми ряду Діріхле в термінах його коефіцієнтів.

У роботі отримано такі наукові результати:

1. для кожного цілого ряду Діріхле побудовано пов'язаний з ним ряд Діріхле, коефіцієнти якого виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого ряду, та доведено теорему апроксимаційного характеру,

що дає оцінку для суми заданого цілого ряду Діріхле через максимальний член пов'язаного ряду;

2. встановлено відносні асимптотичні оцінки для суми заданого цілого ряду Діріхле та максимального члена пов'язаного ряду, знайдено умови на коефіцієнти довільного цілого ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримано необхідні та достатні умови на коефіцієнти цілого ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми;

3. для кожного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле побудовано пов'язані з ним ряди Діріхле, коефіцієнти яких виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого ряду, та доведено теорему апроксимаційного характеру, що дає оцінку для суми заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле через максимальний член пов'язаного ряду;

4. встановлено відносні асимптотичні оцінки для суми заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле та максимального члена кожного з пов'язаних рядів, знайдено умови на коефіцієнти довільного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримано необхідні та достатні умови на коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми;

5. обґрунтовано необхідність отриманої П.В. Філевичем та М.М. Шереметою умови одночасної правильної зміни логарифмів супремуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле;

6. доведено формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена ряду Діріхле;

7. досліджено зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле в термінах модифікованих порядків, зокрема, за доволі загальних припущень щодо функцій порівнянь знайдено необхідні та достатні умови на показники абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, за яких його модифікований порядок збігається з модифікованим порядком логарифма його максимального члена, і встановлено формули для обчислення модифікованого порядку абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле через послідовність модулів його коефіцієнтів.

3. Запитання до здобувача по темі дисертації:

Кандидат фізико-математичних наук, доцент Марцінків М.В.

Чи можна ваші результати застосувати до степеневих рядів?

Відповідь. Так, звичайно. Це пов'язано з тим, що ряди Діріхле є безпосередніми узагальненнями степеневих рядів. Якісно в цьому плані виділяється теорема 3.1, яка у випадку її застосування до степеневого ряду зі скінченним радіусом збіжності дає для суми цього ряду дуже точну асимптотичну оцінку через максимальний член пов'язаного ряду.

Доктор фізико-математичних наук, професор Василишин Т.В.:

Як пов'язані між собою оцінки для $M(\sigma, F)$ і для $\mathfrak{M}(\sigma, F)$?

Відповідь. В роботі переважно встановлено оцінки для величини $\mathfrak{M}(\sigma, F)$. При цьому правильність тієї чи іншої оцінки для $\mathfrak{M}(\sigma, F)$, як функції модулів коефіцієнтів, можна перевірити для будь якого ряду Діріхле за відповідним (знайденим у дисертації) критерієм її виконання, оскільки кожен такий критерій записується в термінах модулів коефіцієнтів ряду.

Величина $M(\sigma, F)$ залежить не лише від модулів коефіцієнтів ряду, а й від їх аргументів. Тому встановлення необхідних та достатніх умов виконання тієї чи іншої оцінки для $M(\sigma, F)$ у випадку довільного заданого ряду Діріхле є надскладною задачею. Проте такі умови можна встановити у широких підкласах рядів Діріхле. Зокрема, якщо деякий підклас з кожним рядом Діріхле вигляду $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ містить також ряд $G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{s\lambda_n}$, то в оцінці для $\mathfrak{M}(\sigma, F)$, яка є точною у вказаному підкласі, ми можемо $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ замінити на $M(\sigma, F)$ і отримати тим самим оцінку для $M(\sigma, F)$, яка також є точною у вказаному підкласі. Це з одного боку пояснюється тим, що $M(\sigma, F) \leq \mathfrak{M}(\sigma, F)$, а тому необхідні та достатні умови виконання оцінки для $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ зверху є автоматично достатніми умовами виконання відповідної оцінки для $M(\sigma, F)$. З іншого боку, якщо точність оцінки для $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ зверху у вказаному підкласі забезпечує ряд F, то точність відповідної оцінки для $M(\sigma, F)$ у цьому підкласі забезпечує ряд G, оскільки $M(\sigma, G) = \mathfrak{M}(\sigma, F)$.

Доктор фізико-математичних наук, професор Осипчук М. М.

Максимальний член якого з двох пов'язаних зі заданим абсолютно збіжним у півплощині рядом Діріхле дає точнішу апроксимацію для його суми?

Відповідь. Таким є ряд F_2, але тут варто зауважити, що структура його коефіцієнтів є складнішою ніж структура коефіцієнтів іншого пов'язаного ряду G_c. При встановлені умов виконання різноманітних оцінок для суми ряду Діріхле ми в основному використовуємо ряд F_2, власне, через можливість отримати точнішу апроксимацію. Більше того, простіший ряд G_c не може бути використаний так загально, як ряд F_2. Проте у тих випадках, коли до встановлення умов виконання тієї чи іншої оцінки вдається задіяти ряд G_c, то це, звичайно, в дисертації зроблено. Записані при цьому умови є простішими для перевірки, ніж у разі залучення ряду F_2.

До доповіді було задано 3 запитання, на яке здобувачка дала правильну та повні відповіді.

4. Виступ наукового керівника д. ф. – м. н., проф. Філевича П. В. Науковий керівник відзначив, що аспірантка Грибель Ольга Богданівна вчасно виконував всі розділи індивідуального плану наукової роботи в установлені терміни. Своєчасність та повнота виконання індивідуального плану аспірантки підтверджена результатами піврічної, проміжної, підсумкової (річної) та заключної атестацій.

Дисертантка Грибель Ольга самостійно отримала усі результати дисертаційного дослідження. За матеріалами дисертації опубліковано 5 статей у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection, 4 тези доповідей у збірниках матеріалів конференцій.

Вважаю, що дисертація Грибель Ольги Богданівни на тему «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле» повністю відповідає вимогам Постанови Кабінету Міністрів України «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» від 12.01.2022 № 44 (зі змінами) та Вимогам до оформлення дисертації, затвердженими наказом МОН України від 12.01.2017 № 40 (зі змінами), та може бути представлена до захисту в разовій спеціалізованій вченій раді.

5. Виступи присутніх членів семінару з оцінкою дисертації.

Д. ф.-м. н., проф. **Шарин С. В.:**

Дисертаційна робота Грибель О. Б. присвячена сучасним проблемам теорії рядів Діріхле та характеризується комплексним підходом до опису асимптотичної поведінки їх сум через послідовності коефіцієнтів. Особливо хочу відзначити нову апроксимаційну теорему щодо пов'язаного ряду, яка фактично усуває залежність оцінок від конкретної системи показників і значно розширює можливості застосування отриманих результатів. У дисертації подано необхідні та достатні умов для низки глобальних та асимптотичних оцінок, що суттєво доповнює і розвиває класичні результати Шеремети М. М. Робота повністю відповідає чинним вимогам і заслуговує на допуск до захисту.

К. ф.-м. н., доц. **Кравців В. В.:**

Дисертація присвячена дослідженню асимптотичних оцінок сум рядів Діріхле, що є класичною, але й досі актуальною темою в сучасній теорії функцій. Авторці вдалося не лише узагальнити ряд раніше відомих результатів, а й запропонувати нові підходи, зокрема у вивченні модифікованих порядків. Особливо варто відзначити встановлення критеріїв збігу порядків для широкого класу рядів, що відкриває перспективи для подальших досліджень. Робота має чітку логічну структуру, результати строго доведені, і вони мають як теоретичну, так і потенційно прикладну цінність.

Д. ф.-м. н., проф. **Дмитришин Р. І.:**

У представленій дисертаційній роботі авторка детально дослідила умови асимптотичних оцінок для рядів Діріхле, використовуючи як класичні, так і сучасні підходи. Особливо вражає глибина аналізу співвідношень між супремумом модуля суми ряду та його максимальним членом. Новизна результатів не викликає сумнівів – окремі твердження мають потенціал стати фундаментальними для подальшого розвитку цієї тематики. Робота виконана на високому рівні, належно апробована, і рекомендую її до захисту.

Д. ф.-м. н., проф. **Загороднюк А. В.:**

Дисертаційна робота Грибель О. Б. є глибоким дослідженням, присвяченим складній і актуальній проблемі – встановленню умов виконання асимптотичних оцінок для сум рядів Діріхле. Авторка не лише охопила широкий спектр класичних і сучасних підходів, а й розробила власну методику, засновану на введенні пов'язаного ряду. Робота свідчить про ґрунтовне володіння теоретичним матеріалом, здатність до узагальнення, критичного аналізу відомих результатів і побудови нових математичних конструкцій.

6. В обговоренні дисертаційної роботи взяли участь: д. ф. – м. н., проф. Загороднюк А. В., д. ф. – м. н., проф. Василишин Т. В., д. ф. – м. н., проф. Осипчук М. М., д. ф. – м. н., проф. Шарин С. В., к. ф. – м. н., доц. Кравців В. В., д. ф. – м. н., проф. Дмитришин Р. І., к. ф. – м. н., доц. Марцінків М.В.

Заслухавши публічну презентацію наукових результатів дисертації Грибель Ольги Богданівни та обговоривши її на фаховому семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу прийнято наступні висновки щодо дисертації: рекомендувати для подання до розгляду та захисту в разовій спеціалізованій вченій раді.

7. Висновок про перевірку дисертацій та наукових публікацій здобувачів на виявлення порушення академічної доброчесності з наданням (до витягу додається довідка за підписом проректора з наукової роботи університету).

УХВАЛИЛИ:

ПРИЙНЯТИ такий **висновок про наукову новизну, теоретичне та практичне значення** результатів дисертації.

Висновок
наукового фахового семінару
кафедри математичного і функціонального аналізу
факультету математики та інформатики
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле»
здобувачки ступеня доктора філософії
Грибель Ольги Богданівни
за спеціальністю 111 Математика
(галузь знань 11 Математика та статистика)

1. Актуальність теми. Вивчення асимптотичних оцінок для сум рядів Діріхле є одним із ключових напрямів у теорії зростання аналітичних функцій. Зокрема, важливе місце займає задача встановлення умов, за яких модуль суми ряду $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ можна ефективно оцінити через його максимальний член $\mu(\sigma; F)$. Такі оцінки дозволяють описати поведінку функції ln M(σ; F) при наближенні до абсциси абсолютної збіжності та тісно пов'язані з характеристиками зростання функцій, представлених рядами Діріхле.

Класичні методи, зокрема підхід Вімана–Валірона і ймовірнісний метод Розенблума, стали основою для встановлення таких оцінок як для степеневих рядів, так і для рядів Діріхле. Їх розвиток і адаптацію до випадку цілих та абсолютно збіжних рядів здійснено у працях ряду дослідників, що дозволило сформулювати необхідні та достатні умови оцінювання модуля суми ряду через його максимальний член – як зі, так і без урахування виняткових множин.

Особливу роль відіграють узагальнені та модифіковані порядки зростання рядів Діріхле, для яких актуальним є встановлення формул типу Коші–Адамара, що дозволяють пов'язати ці характеристики із послідовністю модулів коефіцієнтів. У низці випадків уже отримано точні умови правильності таких формул, проте багато фундаментальних питань залишаються відкритими, зокрема щодо зменшення обмежень на показники ряду та функції порівняння.

Додаткову актуальність становить проблема побудови рядів, пов'язаних із заданими, але з простішою структурою коефіцієнтів, які дають змогу точніше апроксимувати модуль суми. Це відкриває нові можливості для встановлення глобальних оцінок та аналізу зростання, як у випадку цілих рядів, так і для рядів, абсолютно збіжних у півплощині.

2. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Напрямок досліджень Грибель Ольги Богданівни передбачений планами наукової роботи Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. Робота виконана на кафедрі математичного та функціонального аналізу.

Аспірантка Грибель Ольга Богданівна була співвиконавцем науково-дослідної теми "Комплексно-алгебричні методи в теорії динамічних систем і їх застосування для задач радіолокації" (державний реєстраційний номер 0124U000520). Її власне дослідження стало фрагментом даної науково-дослідної роботи.

3. Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів. Усі результати дисертації, що виносяться на захист, отримано автором самостійно.

4. Теоретичне та практичне значення результатів дисертації.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження, зосереджено увагу на науковій новизні одержаних результатів, відзначено теоретичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, наведено дані щодо апробації та публікацій результатів роботи.

Метою дослідження є опис асимптотичних властивостей суми ряду Діріхле в термінах послідовності його коефіцієнтів. Об'єктом дослідження є цілі та абсолютно збіжні у півплощині ряди Діріхле з невід'ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$.

Основну увагу в роботі сконцентровано на отримані умов на послідовність модулів коефіцієнтів $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$ ряду Діріхле, за яких для його суми виконується та чи інша загальна асимптотична оцінка зверху.

У розділі 1 наведено огляд літератури за тематикою дослідження, проведено аналіз відомих результатів, що безпосередньо стосуються теми дисертації, та обґрунтовано вибір напрямків дослідження.

Розділ 2 присвячено встановленню умов виконання різноманітних оцінок для суми цілого ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$. З цією метою для заданого ряду F тут уведено пов'язаний з ним ряд $G_c(s) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n e^{s\lambda_n}$, де $c > 0$ – фіксоване число, $N = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}$ і $b_n = \sum_{\lambda_n \leq \lambda_k < \lambda_n + c} |a_k|$ для всіх цілих $n \geq N$.

У підрозділі 2.1 доведено, що максимальний член $\mu(\sigma, G_c)$ пов'язаного ряду є визначеним для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$ і дає в певному сенсі добру апроксимаційну оцінку для суми ряду F, а саме: для довільних $\sigma \geq 0$ і $\varepsilon > 0$ маємо

$$\mu(\sigma, G_c) \leq \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \frac{\mu(\sigma + \varepsilon, G_c)}{e^{\varepsilon \lambda_N}} \left(\frac{e^{\varepsilon c}}{e^{\varepsilon c} - 1} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \right),$$

де $\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n}$ для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$.

Нехай Ψ – неперервна в околі $+\infty$ функція така, що $\Psi(\sigma)/\sigma \to +\infty$, якщо $\sigma \to +\infty$, $\widetilde{\Psi}$ – функція, спряжена з Ψ за Юнгом, ψ – правобічна похідна від $\widetilde{\Psi}$, h – неспадна, неперервна, необмежена зверху в деякому околі точки $+\infty$ функція така, що $\ln x \leq h\left(\Psi\left(\psi(x)\right)\right)$ для всіх достатньо великих $x \in \mathbb{R}$, а $\Delta = \overline{\lim}_{x \to +\infty} \ln x / \Psi(\psi(x))$.

У підрозділі 2.3, зокрема, доведено, що якщо для всіх достатньо великих $\sigma \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $\ln \mu(\sigma, G_c) \leq \Psi(\sigma)$, то для кожного $\varepsilon > 0$ правильні асимптотичні співвідношення $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) - \Psi(\sigma + \varepsilon) - \ln \sigma \to -\infty$ і $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma) + h(\Psi(\sigma) + \varepsilon) + \ln \sigma + \varepsilon - \ln \varepsilon + o(1)$, якщо $\sigma \to +\infty$.

Підрозділ 2.4 містить результати, що дають необхідні та достатні умови на послідовність $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$, за яких для цілого ряду Діріхле F виконуються деякі загальні асимптотичні оцінки. Наприклад, тут доведено, що для того, щоб існувало число $\varepsilon > 0$ таке, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma + \varepsilon) + \varepsilon\sigma$ для всіх достатньо великих $\sigma \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб існувало число $\delta > 0$ таке, що $\ln |b_n| \leq -\widetilde{\Psi}(\lambda_n - \delta) + \delta(\lambda_n - \delta)$ для всіх достатньо великих невід'ємних цілих n, і показано, що для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх достатньо великих $\sigma \in \mathbb{R}$ ми маємо $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma + \varepsilon) + \varepsilon\sigma$, якщо і лише якщо для кожного $\delta > 0$ і всіх достатньо великих невід'ємних цілих n виконується нерівність $\ln |b_n| \leq -\widetilde{\Psi}(\lambda_n - \delta) + \delta(\lambda_n - \delta)$. Крім того, доведено, що якщо $\Delta < +\infty$, то для того, щоб існувало число $q > 0$ таке, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq q\Psi(\sigma)$ для всіх достатньо великих $\sigma \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб існувало число $p > 0$ таке, що $\ln |b_n| \leq -p\widetilde{\Psi}(\lambda_n / p)$ для всіх достатньо великих невід'ємних цілих n, і показано, що якщо $\Delta = 0$, то для кожного $q > 0$ і для всіх достатньо великих $\sigma \in \mathbb{R}$ ми маємо $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq q\Psi(\sigma)$, якщо і лише якщо для кожного $p > 0$ і для всіх достатньо великих невід'ємних цілих n виконується нерівність $\ln |b_n| \leq -p\widetilde{\Psi}(\lambda_n / p)$.

Нехай $\Psi: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ – довільна функція, а $q_0 \geq 0$ – деяке число. У підрозділі 2.5 доведено, що для того, щоб для кожного числа $q > q_0$ існувала стала $B \in \mathbb{R}$ така, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(q\sigma) + B$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб для кожного числа $p > q_0$ існувала стала $C \in \mathbb{R}$ така, що $\ln b_n \leq -\widetilde{\Psi}(\lambda_n / p) +$

C для всіх цілих $n \geq 0$ ($\widetilde{\Psi}$ – спряжена з Ψ за Юнгом). За додаткових умов на функцію Ψ тут також встановлено необхідні та достатні умови на послідовність $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$, за яких для цілого ряду Діріхле F існують додатні сталі q та B такі, що $\ln\mathfrak{M}(\sigma, F) \leq q\Psi(\sigma + B)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, чи існують дійсні сталі ε і B такі, що $\ln\mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma + \varepsilon) + B$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, чи для кожного $B > 0$ існує стала $\varepsilon \in \mathbb{R}$ така, що $\ln\mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma + \varepsilon) + B$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, чи для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $B \in \mathbb{R}$ така, що $\ln\mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma + \varepsilon) + B$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Ці результати істотно узагальнюють результати, отримані М.М. Шереметою у 1999 р., а знайдені при цьому умови виконання глобальних оцінок записуються у простішій формі.

Аналоги результатів з розділу 2 для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле встановлено у розділі 3. Власне, розділ 3 присвячено встановленню умов виконання загальних оцінок для суми довільного ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a(F) \geq 0$. З цією метою для кожного такого ряду F тут уведено пов'язані з ним ряди $F_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n e^{s\lambda_n}$, де $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ для всіх цілих $n \geq 0$, а також $G_c(s) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n e^{s\lambda_n}$, де $c > 0$, $N = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}$ і $b_n = \sum_{\lambda_n - c < \lambda_k \leq \lambda_n} |a_k|$ для всіх цілих $n \geq N$.

У підрозділі 3.1 доведено, що максимальні члени $\mu(\sigma, F_2)$ та $\mu(\sigma, G_c)$ пов'язаних рядів є визначеними для всіх $\sigma < 0$ і дають в певному сенсі добрі апроксимаційні оцінки для суми заданого ряду F з $\sigma_a(F) \geq 0$, а саме: для довільних $\sigma \geq 0$ і $\varepsilon \in (0, |\sigma|)$ маємо

$$\mu(\sigma, F_2) \leq \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \frac{|\sigma|\mu(\sigma + \varepsilon, F_2)}{\varepsilon e^{\varepsilon\lambda_0}},$$

$$\mu(\sigma, G_c) \leq \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \frac{\mu(\sigma + \varepsilon, G_c)}{e^{\varepsilon\lambda_N}}\left(\frac{|\sigma|}{\varepsilon} + \frac{1}{e^{\varepsilon(\lambda_L - \lambda_N)}} + \frac{1}{e^{\varepsilon c} - 1}\right),$$

де $\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\sigma\lambda_n}$ для кожного $\sigma < 0$.

Нехай Ψ – неперервна на $[a, 0)$ функція така, що $\Psi(\sigma) \to +\infty$, якщо $\sigma \uparrow 0$, $\widetilde{\Psi}$ – функція, спряжена з Ψ за Юнгом, ψ – правобічна похідна від $\widetilde{\Psi}$, h – неспадна, неперервна, необмежена зверху в деякому околі точки $+\infty$ функція така, що $\ln x \leq h\left(\Psi\left(\psi(x)\right)\right)$ для всіх достатньо великих $x \in \mathbb{R}$.

У підрозділі 3.2, зокрема, доведено, що якщо $q := \varliminf_{x \to +\infty} |\psi(x)| x > 0$ і $\ln\mu(\sigma, F_2) \leq \Psi(\sigma)$ для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0, то для кожного додатного $\eta < \left(\sqrt{q+1} - 1\right)/\left(\sqrt{q+1} + 1\right)$ і для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0 правильна нерівність $\ln\mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\eta\sigma)$. Якщо ж $\ln\mu(\sigma, H_c) \leq \Psi(\sigma)$ для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0, то для кожного $\varepsilon > 0$ маємо $\ln\mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma) + h(\Psi(\sigma) + \varepsilon) + \varepsilon - \ln\varepsilon - \ln c + o(1)$, якщо $\sigma \uparrow 0$.

Підрозділ 3.3 складається з результатів, що дають умови на послідовність $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$, які є необхідними та достатніми для того, щоб для заданого ряду Діріхле F з $\sigma_a(F) \geq 0$ виконувалась та чи інша загальна асимптотична оцінка. За деяких не надто обтяжливих обмежень знизу на зростання функції ψ тут наведено умови, за яких: існує $\delta \in (0,1)$ таке, що $\ln\mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\delta\sigma)$ для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0, або для кожного $\delta \in (0,1)$ і для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0 виконується нерівність

$\ln\mathfrak{M}(\sigma,F) \le \Psi(\delta\sigma)$, або існує $q > 0$ таке, що $\ln\mathfrak{M}(\sigma,F) \le q\Psi(\sigma)$ для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0, або для кожного $q > 1$ і для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0 виконується нерівність $\ln\mathfrak{M}(\sigma,F) \le q\Psi(\sigma)$.

Нехай $\Psi\colon (-\infty,0) \to \overline{\mathbb{R}}$ – довільна функція. У підрозділі 3.4 доведено, що для того, щоб існували сталі $q \in (0,1)$ і $B \in \mathbb{R}$ такі, що нерівність $\ln\mathfrak{M}(\sigma,F) \le \Psi(q\sigma) + B$ виконується для всіх $\sigma < 0$, необхідно і досить, щоб існували сталі $p \in (0,1)$ і $C \in \mathbb{R}$ такі, що $\ln S_n \le -\widetilde{\Psi}(\lambda_n/p) + C$ для кожного цілого $n \ge 0$. Крім того, вказано необхідні та достатні умови на $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ (а тому й на $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$), за яких для кожного $q \in (0,1)$ існує стала $B \in \mathbb{R}$ (чи для кожного $B > 0$ існує стала $q \in (0,1)$) така, що $\ln\mathfrak{M}(\sigma,F) \le \Psi(q\sigma) + B$ для всіх $\sigma < 0$.

У заключному розділі 4 розглянуто деякі відкриті задачі, пов'язані з відносним зростанням ряду Діріхле і його максимального члена.

Нехай $\rho \ge 1$, $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ – невід'ємна зростаюча до $+\infty$ послідовність, $C(1) = +\infty$ і $C(\rho) = \rho/(\rho-1)$ для кожного $\rho > 1$. У 2003 році П.В. Філевич і М.М. Шеремета знайшли необхідні та достатні умови на послідовність коефіцієнтів довільного цілого ряду Діріхле F, за яких логарифм його максимального члена $\ln\mu(\sigma,F)$ є правильно змінною функцією порядку ρ, а також довели, що умова $\overline{\lim}_{n\to\infty} \ln\ln n/\ln\lambda_n < C(\rho)$ є достатньою для того, щоб для кожного цілого ряду Діріхле F зі заданою системою показників λ логарифм його супремуму модуля $\ln M(\sigma,F)$ і функція $\ln\mu(\sigma,F)$ були одночасно правильно змінними функція порядку ρ. Необхідність наведеної умови обґрунтовано у підрозділі 4.1. Більше того, тут доведено, що якщо $\overline{\lim}_{n\to\infty} \ln\ln n/\ln\lambda_n \ge C(\rho)$, то можна вказати правильно змінну порядку ρ функцію Φ таку, що для довільної додатної на $[a,+\infty)$ функції l існує цілий ряд Діріхле F зі заданою системою показників λ, для якого $\ln\mu(\sigma,F) \sim \Phi(\sigma)$, якщо $\sigma \to +\infty$, і $M(\sigma,F) \ge l(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$.

Нехай $A \in (-\infty,+\infty]$, α – неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[x_0,+\infty)$ функція, β – неперервна на $[a,A)$ функція така, що $\beta(\sigma) \to +\infty$, якщо $\sigma \uparrow A$. У підрозділі 4.2 для ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ з абсцисою існування максимального члена $\sigma_e(F) \ge A$ знайдено формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма його максимального члена $R^*_{\alpha,\beta}(F) := \overline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \alpha(\max\{x_0, \ln\mu(\sigma,F)\})/\beta(\sigma)$ за послідовністю $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$: якщо $A < +\infty$, то

$$R^*_{\alpha,\beta}F) = \sup_{\eta\in\Lambda} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\eta_n)}{\beta\left(\frac{\eta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)},$$

де sup береться за всіма зростаючими до $+\infty$ послідовностями $\eta = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$; ця формула правильна також і у випадку $A = +\infty$, якщо тільки ряд F не зводиться до експоненційного полінома.

Дослідження зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле в термінах модифікованих (зокрема, узагальнених) порядків проведено у підрозділі 4.3. Нехай α – неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[x_0,+\infty)$ функція, β – неперервна на $[b,0)$ функція така, що $\beta(\sigma) \to +\infty$, якщо $\sigma \uparrow A$, а γ – додатна неперервна на $[c,0)$ функція. Для ряду Діріхле F з $\sigma_a(F) \ge 0$

покладемо $R_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = \overline{\lim}_{\sigma\uparrow 0} \alpha(\max\{x_0, \gamma(\sigma)\ln M(\sigma, F)\})/\beta(\sigma)$ і нехай $R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = \overline{\lim}_{\sigma\uparrow 0} \alpha(\max\{x_0, \gamma(\sigma)\ln \mu(\sigma, F)\})/\beta(\sigma)$. За додаткових, але загальних припущень щодо функцій порівняння α, β і γ знайдено необхідні та достатні умови на послідовність $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$, за яких $R_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F)$ для кожного ряду Діріхле вигляду $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ з $\sigma_a(F) \geq 0$, а також встановлено формули для обчислення $R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F)$ через послідовність $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$.

5. Наукова новизна отриманих результатів.

Усі основні наукові результати, отримані в дисертації, є новими. У дисертаційній роботі вперше:

1) для кожного цілого ряду Діріхле побудовано пов'язаний з ним ряд Діріхле, коефіцієнти якого виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого ряду, та доведено теорему апроксимаційного характеру, що дає оцінку для суми заданого цілого ряду Діріхле через максимальний член пов'язаного ряду;

2) встановлено відносні асимптотичні оцінки для суми заданого цілого ряду Діріхле та максимального члена пов'язаного ряду, знайдено умови на коефіцієнти довільного цілого ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримано необхідні та достатні умови на коефіцієнти цілого ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми;

3) для кожного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле побудовано пов'язані з ним ряди Діріхле, коефіцієнти яких виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого ряду, та доведено теорему апроксимаційного характеру, що дає оцінку для суми заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле через максимальний член пов'язаного ряду;

4) встановлено відносні асимптотичні оцінки для суми заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле та максимального члена кожного з пов'язаних рядів, знайдено умови на коефіцієнти довільного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримано необхідні та достатні умови на коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми;

5) обґрунтовано необхідність отриманої П. В. Філевичем та М. М. Шереметою умови одночасної правильної зміни логарифмів супремуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле;

6) доведено формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена ряду Діріхле;

7) досліджено зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле в термінах модифікованих порядків, зокрема, за доволі загальних припущень щодо функцій порівнянь знайдено необхідні та достатні умови на показники абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, за яких його модифікований порядок збігається з модифікованим порядком логарифма його максимального

члена, і встановлено формули для обчислення модифікованого порядку абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле через послідовність модулів його коефіцієнтів.

6. Використання (апробація) результатів роботи.

Матеріали дисертації оприлюднено у виступах на міжнародних наукових конференціях: звітній науковій веб-конференції викладачів, докторантів, аспірантів та студентів Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника за 2020 рік (Івано-Франківськ, 5 - 9 квітня 2021 року), міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics 2021", присвяченій 90-річчю А.А. Гольдберга (Львів, 28 червня - 1 липня 2021 року), міжнародній конференції з комплексного та функціонального аналізу, присвяченій пам'яті Богдана Винницького (Дрогобич, 13 - 16 вересня 2021 року), міжнародному семінарі з сучасних тенденцій в аналізі та теорії апроксимації (Рим, 18 червня 2023 року), науковому семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, 2021 - 2025 роки), Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. О.Б. Скасків, проф. І.Е. Чижиков, проф. М.В. Заболоцький, проф. П.В. Філевич, Львів, 2024 - 2025 роки).

7. Особиста участь автора – одержання наукових та практичних результатів, що викладені в дисертаційній роботі.

Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор Філевич П. В.

Робота є результатом самостійних досліджень аспірантки Грибель О. Б.

8. Перелік публікацій за темою дисертації.

За результатами досліджень опубліковано 9 наукових праць, зокрема:

- 5 стаття у наукових фахових виданнях України, що індексуються у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection;
- 4 тези доповідей у збірниках матеріалів конференцій.

Статті в наукових фахових виданнях України:

1. Filevych P.V., Hrybel O.B. The growth of the maximal term of Dirichlet series // Carpathian Math. Publ. – 2018. – Vol. 10, no. 1. – P. 79 – 81.

DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.79-81

URL: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000437802500007

ISSN: 2075-9827

2. Filevych P.V., Hrybel O.B. On regular variation of entire Dirichlet series // Mat. Stud. – 2023. – Vol. 58, no. 2. – P. 174 – 181.

DOI: https://doi.org/10.30970/ms.58.2.174-181

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85163316386

ISSN: 1027-4634

3. Filevych P.V., Hrybel O.B. Global estimates for sums of absolutely convergent Dirichlet series in a half-plane // Mat. Stud. – 2023. – Vol. 59, no. 1. – P. 60 – 67.

DOI: https://doi.org/10.30970/ms.59.1.60-67

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85163398844

ISSN: 1027-4634

4. Filevych P.V., Hrybel O.B. Generalized and modified orders of growth for Dirichlet series absolutely convergent in a half-plane // Mat. Stud. – 2024. – Vol. 61, no. 2. – P. 136 – 147.

DOI: https://doi.org/10.30970/ms.61.2.136-147

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85197629578

ISSN: 1027-4634

5. Hrybel O.B., Filevych P.V. Estimates for sums of Dirichlet series // Carpathian Math. Publ. – 2025. – Vol. 17, no. 1. – P. 42 – 66.

DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.17.1.42-66

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/105003942243

ISSN: 2075-9827

Публікації за матеріалами конференцій:

1. Грибель О.Б. Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле // Звітна наукова веб–конференція викладачів, докторантів, аспірантів та студентів університету за 2020 рік (Івано–Франківськ, 5 – 9 квітня 2021 р.): матеріали конференції – Івано –Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. – 2021. – С. 107–108.

URL: https://nauka.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/122/2021/08/\%D1\%82\%D0\%B5\%D0\%B7\%D0\%B8-\%D0\%BF\%D0\%BD\%D1\%832021.pdf

2. Filevych P.V., Hrybel O.B. Generalized orders of the growth of entire Dirichlet series// International Conference "Complex Analysis and Related Topics 2021" dedicated to the 90th anniversary of A.A.Gol'dberg (Lviv, 28 June – 1 July 2021): book of abstracts – Lviv: Ivan Franko National University of Lviv. – 2021. – P. 19.

URL: https://drive.google.com/file/d/1P9TrflBix_jWCGckC0pMqY7Eo0hbfm8O/view?usp=sharing

3. Filevych P.V., Hrybel O.B. Asymptotic estimates for sums of absolutely convergent Dirichlet series in a half-plane// The International Conference in Complex and Functional Analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi (Drohobych, 13 – 16 September 2021): book of abstracts – Drohobych: Drohobych State Pedagogical University of Ivan Franko. – 2021. – P. 18.

URL: https://drive.google.com/file/d/1Dih2rV_XwkNlCcnQ5QmSLi7Udqj0Spxx/view?usp=sharing

4. Hrybel O.B. Generalized orders of the growth for Dirichlet series absolutely convergent in a half-plane// International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory (Rome, 18 July 2023): book of proceedings – Rome: International Telematic University UNINETTUNO. – 2023. – P. 76 –78.

URL: https://drive.google.com/file/d/1oDjx1bPqWu4AMdTqTsV0_-GqOZLghPGA/view?usp=drive_link

9. Наукове значення виконаного дослідження.

Здобувачкою Грибель О.Б. вперше: для кожного цілого ряду Діріхле побудовано пов'язаний з ним ряд Діріхле, коефіцієнти якого виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого ряду, та доведено теорему апроксимаційного характеру, що дає оцінку для суми заданого цілого ряду Діріхле через максимальний член пов'язаного ряду; встановлено відносні асимптотичні оцінки для суми заданого цілого ряду Діріхле та максимального члена пов'язаного ряду, знайдено умови на коефіцієнти довільного цілого ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримано необхідні та достатні умови на коефіцієнти цілого ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми; для кожного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле побудовано пов'язані з ним ряди Діріхле, коефіцієнти яких виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого ряду, та доведено теорему апроксимаційного характеру, що дає оцінку для суми заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле через максимальний член пов'язаного ряду; встановлено відносні асимптотичні оцінки для суми заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле та максимального члена кожного з пов'язаних рядів, знайдено умови на коефіцієнти довільного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних оцінок для його суми, а також отримано необхідні та достатні умови на коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, що забезпечують виконання деяких глобальних оцінок зверху для його суми; обґрунтовано необхідність отриманої П.В. Філевичем та М.М. Шереметою умови одночасної правильної зміни логарифмів супремуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле; доведено формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена ряду Діріхле; досліджено зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле в термінах модифікованих порядків, зокрема, за доволі загальних припущень щодо функцій порівнянь знайдено необхідні та достатні умови на показники абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, за яких його модифікований порядок збігається з модифікованим порядком логарифма його максимального члена, і встановлено формули для обчислення модифікованого порядку абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле через послідовність модулів його коефіцієнтів.

Усі наведені результати отримано здобувачкою особисто, вони мають новизну з теоретичної точки зору.

10. Практична цінність результатів дослідження із зазначенням конкретного підприємства або галузі народного господарства, де вони можуть бути застосовані.

Отримані результати мають фундаментальний теоретичний характер. Вони можуть бути корисними як в теорії аналітичних функцій, так і в інших розділах математики. Результати дослідження можуть бути використані науковцями та дослідницькими групами провідних наукових установ України та світу, зокрема: Прикарпатського національного університету імені Василя

Стефаника, Львівського національного університету імені Івана Франка, Національного університету «Львівська політехніка», Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Інституту математики НАН України, а також інших університетів та наукових центрів. Частина результатів, представлених у дисертації, знаходить своє застосування в працях інших дослідників, що підтверджується посиланнями на її статті в їхніх роботах, зокрема, Т. Бісваса, С.І. Фединяка і П.В. Філевича, А.Бандури, О. Скасківа, І. Гураль, Л. Шегди і Л. Смоловик.

11. Оцінка структури дисертації, її мови та стилю викладення.

Дисертація за структурою, мовою та стилем викладення відповідає вимогам МОН України.

За результатами фахового семінару зроблено висновки:

1. Дисертація Грибель О.Б. на тему «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле» є завершеною науковою працею, в якій розв'язано конкретне наукове завдання – встановлення необхідних і достатніх умов виконання загальних та глобальних асимптотичних оцінок для сум рядів Діріхле через їхні коефіцієнти. У роботі введено нові конструкції пов'язаних рядів Діріхле, які дозволили встановити апроксимаційні оцінки для суми початкового ряду через максимальний член пов'язаного ряду незалежно від поведінки показників. Проведено детальний аналіз відносних оцінок, узагальнених і модифікованих порядків зростання, а також запропоновано нові підходи до їх обчислення, зокрема доведено формулу типу Коші–Адамара для логарифма максимального члена. Теоретичні результати узагальнюють і доповнюють наявні досягнення в цій галузі, а також становлять інтерес для подальших досліджень у теорії цілих і аналітичних функцій, функціональних рядів і суміжних напрямках.

2. За темою дисертації опубліковано 9 наукових публікацій, де повністю відображені основні результати дисертації, з них 5 публікацій у журналах, які індексуються наукометричними базами Web of Science або Scopus та 4 тези доповідей у збірниках матеріалів конференцій.

3. Дисертація відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» Постанова КМУ від 12.01.2022 № 44 (зі змінами) та вимогам наказу МОН України №40 від 12.01.2017 (зі змінами) «Про затвердження вимог до оформлення дисертації».

4. Рекомендувати дисертацію «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле», подану Грибель Ольгою Богданівною на здобуття ступеня доктора філософії, для подання до розгляду та захисту у спеціалізованій вченій раді Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

5. Розглянувши заяви і документи голови СВР, рецензентів і опонентів, та встановивши, що подані документи відповідають вимогам до членів спеціалізованої вченої ради згідно «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії»

(Постанова КМУ від 12.01.2022 № 44 (зі змінами)), пропонувати вченій раді Університету призначити наступний склад разової ради:

Голова разової спеціалізованої вченої ради:

– Шарин Сергій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з науково-педагогічної роботи Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

1) Dmytryshyn R., Sharyn S. Representation of Special Functions by Multidimensional A- and J-Fractions with Independent Variables // Fractal and Fractional. – 2025. – Vol. 9, no. 2. – No. 89.

Ключові слова: branched continued fraction; holomorphic functions of several complex variables; multiple power series; numerical approximation

DOI: 10.3390/fractalfract9020089

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85218866565

ISSN: 2504-3110

2) Antonova T., Dmytryshyn R., Kril P., Sharyn S. Representation of Some Ratios of Horn's Hypergeometric Functions H_7 by Continued Fractions // Axioms. – 2023. – Vol. 12, no. 8. – No. 738.

Ключові слова: continued fraction; convergence; holomorphic functions of several complex variables; Horn function; numerical approximation

DOI: 10.3390/axioms12080738

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85169076746

ISSN: 2075-1680

3) Antonova T., Dmytryshyn R., Lutsiv I.-A., Sharyn S. On Some Branched Continued Fraction Expansions for Horn's Hypergeometric Function $H4(a,b;c,d;z_1,z_2)$ Ratios // Axioms. – 2023. – Vol. 12, no. 3. – No. 299.

Ключові слова: branched continued fraction; convergence; holomorphic functions of several complex variables; Horn function; numerical approximation

DOI: 10.3390/axioms12030299

URL:https://www.scopus.com/pages/publications/85151161720

ISSN: 2075-1680

Рецензенти:

– **Дмитришин Роман Іванович** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

1) Dmytryshyn R., Antonova T., Dmytryshyn M. On the analytic extension of the Horn's confluent function H_6 on domain in the space C^2 // Constructive Mathematical Analysis. – 2024. – Vol. 7– P. 11-26.

Ключові слова: analytic continuation; branched continued fraction; convergence; holomorphic functions of several complex variables; Horn's hypergeometric function

DOI: 10.33205/cma.1545452

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85210452808

ISSN: 2651-2939

2) Dmytryshyn R., Goran V. On the Analytic Extension of Lauricella–Saran's Hypergeometric Function F_k to Symmetric Domains // Symmetry. – 2024. – Vol. 16, no. 2– No. 220.

Ключові слова: analytic continuation; branched continued fraction; convergence; holomorphic functions of several complex variables; Lauricella–Saran's hypergeometric function

DOI: 10.3390/sym16020220

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85187312784

ISSN: 2073-8994

3) Antonova T., Dmytryshyn R., Goran V. On the Analytic Continuation of Lauricella–Saran Hypergeometric Function F_k $(a_1,a_2,b_1,b_2;a_1,b_2,c_3;z)$ // Mathematics.– 2023. – Vol. 11, no. 21.– No.

Ключові слова: analytic continuation; branched continued fraction; convergence; holomorphic functions of several complex variables; Lauricella–Saran hypergeometric function

DOI: 10.3390/math11214487

URL:https://www.scopus.com/pages/publications/85176567798

ISSN: 2227-7390

– **Загороднюк Андрій Васильович** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

1) Baziv N., Zagorodnyuk A. Analytic Invariants of Semidirect Products of Symmetric Groups on Banach Spaces // Symmetry. – 2023. – Vol. 15, no. 12.– No. 2117.

Ключові слова: algebraic bases; algebras of analytic functions; block-symmetric polynomials; semidirect product; symmetric analytic functions on Banach spaces

DOI: 10.3390/sym15122117

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85180652226

ISSN: 2073-8994

2) Novosad Z., Zagorodnyuk A. The Backward Shift and Two Infinite-Dimension Phenomena in Banach Spaces // Symmetry. – 2023. – Vol. 15, no. 10.– No. 1855.

Ключові слова: analytic functions of unbounded type; analytic functions on Banach spaces; topologically transitive operators

DOI: 10.3390/sym15101855

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85175440009

ISSN: 2073-8994

3) Novosad Z., Vasylyshyn S., Zagorodnyuk A. Countably Generated Algebras of Analytic Functions on Banach Spaces // Axioms. – 2023. – Vol. 12, no. 8. – No. 798.

Ключові слова: algebras of analytic functions on Banach spaces; analytic mappings of unbounded type; hypercyclic operator; spectra of algebras

DOI: 10.3390/axioms12080798

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85169106693

ISSN: 2075-1680

Офіційні опоненти:

– **Бандура Андрій Іванович** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізико-математичних наук Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

1) Bandura A., Skaskiv O., Hural I., Shehda L., Smolovyk L. Analytic functions in a unit polydisc: conditions of directional boundedness of L-index for the sum of functions with directionally bounded L-index // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2025. – Vol. 288, no. 2. – P. 155-162.

Ключові слова: analytic function; Bounded L-index in direction; directional derivative; sum; unit polydisc

DOI: 10.1007/s10958-025-07674-8

URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-105001637298&origin=recordpage

ISSN: 1072-3374

2) Bandura A.I., Mulyava O.M., Sheremeta M.M. On Dirichlet series similar to Hadamard compositions in half-plane // Carpathian Mathematical Publications. – 2023. – Vol. 15, no. 1. – P. 180–195.

Ключові слова: Dirichlet series; generalized convergence class; generalized order; generalized type; Hadamard composition; pseudoconvexity; pseudostarlikeness

DOI: 10.15330/cmp.15.1.180-195

URL:https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85164434624&origin=recordpage

ISSN: 2075-9827

3) Bandura A. I., Salo T. M., Skaskiv O. B. Erdős-Macintyre type theorem's for multiple Dirichlet series: exceptional sets and open problems // Matematychni Studii. – 2023. – Vol. 58, no. 2. – P. 212-221.

Ключові слова: Dirichlet series; Erdős-Macintyre theorem; exceptional set; maximal term; maximum modulus; minimum modulus; Wiman's inequality

DOI: 10.30970/ms.58.2.212-221

URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85151918498&origin=recordpage

ISSN: 1027-4634

– **Трухан Юрій Степанович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка.

1) Mulyava O.M., Sheremeta M.M., Trukhan Yu.S. Relative growth of Hadamard compositions of Dirichlet series absolutely convergent in a half-plane // Matematychni Studii. – 2025. – Vol. 63, no. 1. – P. 21-30.

Ключові слова: Dirichlet series; generalized convergence class; generalized order; Hadamard composition

DOI: 10.30970/ms.63.1.21-30

URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-105001279406&origin=recordpage

ISSN:1027-4634

2) Sheremeta M. M., Trukhan Yu. S. On a generalization of some Shah equation // Carpathian Mathematical Publications. – 2024. – Vol. 16, no. 1. – P. 259-266.

Ключові слова: close-to-pseudoconvexity; differential equation; Dirichlet series; pseudoconvex-ity; pseudostarlikeness

DOI: 10.15330/cmp.16.1.259-266

URL: https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85198525070&origin=recordpage

ISSN: 2075-9827

3) Sheremeta M. M., Trukhan Yu.S. On the growth of the maximum modulus of Dirichlet series // Bukovinian Mathematical Journal. –2024. – Vol. 12, no. 1. – P. 32-42.

Ключові слова: Dirichlet series, maximum modulus, generalised order.

DOI: 10.31861/bmj2024.01.04

URL: https://scholar.google.com.ua/citations?view_op=view_citation&hl=uk&user=A1GD570AAAAJ&sortby=pubdate&citation_for_view=A1GD570AAAAJ:hC7cP41nSMkC

ISSN: 2309-4001

Голова фахового семінару
доктор фізико-математичних наук,
професор, проректор з
науково-педагогічної роботи
Прикарпатського національного
університету імені Василя Стефаника — Сергій ШАРИН

Секретар фахового семінару
старший лаборант кафедри
математичного і функціонального аналізу
Прикарпатського національного
університету імені Василя Стефаника — Ольга ВАСИЛИК

21 травня 2025 р.