Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
"Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника"

На правах рукопису

Стефлюк Світлана Дмитрівна

УДК 512.62+512.643.2

МНОГОЧЛЕНИ РОЗБИТТІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Заторський Роман Андрійович
доктор фізико-математичних наук, професор

Івано-Франківськ — 2016

ЗМІСТ

Вступ 4

РОЗДІЛ 1. Огляд літератури, допоміжні факти та основні результати 11

1.1. Огляд літератури за темою дисертації 11

1.2. Допоміжні поняття та твердження 16

1.3. Основні напрямки та результати досліджень 33

РОЗДІЛ 2. Зображення многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць 47

2.1. Два класи взаємно обернених многочленів розбиттів 48

2.2. Парафункції трикутних матриць похилої структури з першим довільним стовпцем 65

2.3. Обернені многочлени розбиттів 71

2.4. Многочлени розбиттів, що генеруються парафункціями трикутних матриць з двома першими довільними стовпцями 75

2.5 Загальна теорема про многочлени розбиттів 82

Висновки до розділу 2 96

РОЗДІЛ 3. Теоретико-числові функції та многочлени розбиттів 99

3.1. Теоретико-числові функції, пов'язані з розбиттями та сумами дільників натурального числа 99

3.2. Модифікація теореми обернення Мебіуса 108

Висновки до розділу 3 113

Висновки 114

Список використаних джерел 116

ВСТУП

Актуальність теми. У багатьох розділах математики виникає необхідність розбивати множини на класи еквівалентності. При цьому потужність скінченної множини розбивається в суму потужностей її підмножин без спільних елементів. Так виникають невпорядковані розбиття натурального числа на натуральні доданки. Проте, часто виникає потреба і у впорядкованих розбиттях натуральних чисел на цілі невід'ємні доданки.

Розбиття натурального числа, як правило, виникають при дослідженні однорідних многочленів від багатьох змінних. Знаменита поліноміальна теорема, яка пов'язана із впорядкованими розбиттями натурального числа на цілі невід'ємні доданки, була відома ще Г.В. Ляйбніцу. Цікаво, що вона допускає суттєве узагальнення на випадок факторіальних степенів та має аналоги, які пов'язані із диференціюванням добутку функцій.

Поняття многочлена розбиттів запроваджене Беллом в роботі [15]. Під многочленом розбиттів Белл розумів однорідний многочлен степеня n від декількох змінних, означений при допомозі суми за різними невпорядкованими розбиттями натурального числа n на натуральні доданки. Однак, такі многочлени вивчались задовго до Белла. Так, Варінг встановив загальну формулу, яка пов'язує орбіти симетричних многочленів із степеневими сумами. Наслідком цієї формули є формула Варінга, яка виражає елементарні симетричні многочлени через степеневі суми, тобто коефіцієнти алгебричного рівняння через степеневі суми його коренів (многочлени Ньютона). Теорія симетричних функцій має важливі застосування у комбінаториці

(діаграми та таблиці Юнга), алгебраїчній геометрії та теорії зображень симетричних груп (коефіцієнти зображення многочленів Шура через елементарні симетричні многочлени Ньютона (степеневі суми), пов'язані з характерами зображень симетричних груп [13]). В наш час ця теорія повязана з іменами І. Шура, А. Юнга [39], А. Річардсона та Д.Е. Літтлвуда. Із найбільш сучасних галузей математики де використовуються симетричні функції є нескінченновимірні групи і алгебри Лі.

Ріордан, у своїх монографіях [52], [53] розглядає досить широкий клас многочленів розбиттів, який називає многочленами Белла. До цього класу входить багато відомих многочленів: циклові індикатори симетричних груп, многочлени пов'язані із оберненням степеневих рядів, многочлени пов'язані із теоретико-числовими величинами, многочлени диференціювання складених функцій тощо. Платонов [51] вводить спряжені до поліномів Белла поліноми. Вивчаючи деякі властивості циклової структури підстановок, Тушар у [60] запровадив ряд узагальнень поліномів Белла. Один клас таких поліномів названо його іменем. Поліноми Тушара досліджувалися у [40, 41, 42, 43, 44, 67]. Деякі частинні класи поліномів Тушара використовуються в задачах про випадкові блукання [68].

У 1855 році Фаа ді Бруно [61] виводить формулу для n-тої похідної складеної функції, яка зображується у вигляді многочлена розбиттів. Однак він її подав у вигляді визначника. Першим формулу похідної n-того порядку у вигляді многочлена розбиттів вивів французький математик Луї Аброгас у 1800 році. Зауважимо, що цю формулу можна також подати у термінах числення трикутних матриць, а саме у вигляді скалярного

добутку деякого вектора на парафункцію трикутної матриці. Сьогодні відомі також узагальнення цієї формули на випадок функцій від багатьох змінних.

Многочлени розбиттів мають також важливі застосування у теорії чисел [46], [62]. Вони пов'язані із невпорядкованими розбиттями натурального числа на натуральні доданки та сумами дільників натуральних чисел.

Многочлени розбиттів, як правило, пов'язані із лінійними рекурентними співвідношеннями, генератрисами та парафункціями трикутних матриць. Проте, історично склалося так, що многочлени розбиттів, рекурентні співвідношення та генератриси [69] досліджувалися без природного взаємозв'язку. З появою апарату числення трикутних матриць, зокрема їх парафункцій, з'явилася можливість побудови бієктивних взаємозв'язків між парафункціями трикутних матриць, многочленами розбиттів та лінійними рекурентними співвідношеннями. Більше того, з'явилася можливість уніфікованого підходу до вивчення всіх многочленів розбиттів, введення поняття оберненого многочлена розбиттів, суперпозиції многочленів розбиттів тощо. Таким чином, з'являються ключові теореми загальної теорії розбиттів.

Зв'язок роботи з науковими темами. Дисертаційне дослідження проведене в рамках плану наукової роботи кафедри алгебри та геометрії ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника". Тематика дисертаційної роботи пов'язана із дослідженнями кафедри алгебри та геометрії і проводилася за одним із основних напрямків наукових досліджень кафедри "Числення трикутних матриць та його засто-

сування у теорії чисел та комбінаторному аналізі"(тема затверджена на засіданні Вченої ради ДВНЗ "Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника"протокол №11 від 27 листопада 2012 року.)

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова зображень многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць та дослідження їх зв'язків з лінійними рекурентними співвідношеннями. Для досягнення поставленої мети у дисертаційній роботі було запропоновано наступні задачі:

- дослідити клас взаємно обернених многочленів розбиттів, що зображуються парафункціями трикутних матриць похилої структури;
- вивчити властивості многочленів розбиттів, що зображуються парафункціями трикутних матриць похилої структури з першим довільним стовпцем;
- дослідити клас многочленів розбиттів, що зображуються парафункціями похилих трикутних матриць з двома першими довільними стовпцями;
- довести загальну теорему про зображення многочленів розбиттів парафункціями довільних трикутних матриць похилої структури;
- завершити дослідження зв'язків m-арних розбиттів натурального числа та сумою m-арних дільників натуральних чисел;
- зобразити відомі многочлени розбиттів парафункціями трикутних матриць та дослідити їх нові властивості;

- модифікувати класичну теоретико-числову теорему обернення Мебіуса для мультибулеана із відношенням включення.

Об'єктом дослідження в дисертаційній роботі є многочлени розбиттів та відповідні їм лінійні рекурентні співвідношення.

Предметом дослідження є властивості многочленів розбиттів та деяких теоретико-числових функцій натурального аргументу і зображення їх парафункціями трикутних матриць.

Методи дослідження. Для розв'язання запропонованих задач використовується апарат числення трикутних матриць.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі отримані в дисертаційній роботі результати є новими. У роботі вперше:

- вивчено властивості широкого класу взаємно обернених многочленів розбиттів, що зображується парафункціями трикутних матриць похилої структури та встановлено їх зв'язок із відповідними лінійними рекурентними співвідношеннями;
- досліджено многочлени розбиттів, що задаються парафункціями трикутних матриць з першим довільним стовпцем та побудовано відповідні обернені многочлени розбиттів;
- отримано клас многочленів розбиттів, що зображуються парафункціями трикутних матриць похилої структури з двома першими довільними стовпцями та встановлено для них відповідні лінійні рекурентні співвідношення;
- досліджено многочлени розбиттів, що генеруються парафункціями довільних трикутних матриць похилої структури;

- завершено дослідження властивостей m-арних розбиттів та m-арних сум дільників натурального числа;
- модифіковано теоретико-числову теорему обернення арифметичних функцій.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані у дисертаційній роботі носять теоретичний характер. Вони можуть бути використані в алгебрі, теорії чисел, комбінаторному аналізі та інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Науковому керівнику Р.А. Заторському в роботах опублікованих спільно [2, 3, 5], належить постановка задач та загальне керівництво роботою. В роботі [3] опублікованої спільно із В.М. Пилипівом, співавтору належить формулювання наслідку 1. Конкретна реалізація була здійснена автором дисертаційної роботи самостійно.

Публікації. Матеріали дисертаційної роботи викладені у 9 публікаціях, у тому числі 5 статей [1-5] у наукових фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (з них 2 [2, 5]– у наукових фахових виданнях, що включені до наукометричної бази даних "Scopus") та апробовано на 4 міжнародних наукових конференціях [6-9].

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались на алгебраїчних семінарах кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника, на засіданнях Івано-Франківського осередку Наукового товариства ім. Шевченка, XXIV науковій сесії НТШ

(Івано-Франківськ, 2013) та апропобовано на конференціях:

1) XIV Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012);

2) IX Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Львів, 8-13 липня 2013);

3) XV Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014);

4) X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні присвяченій 70-річчю Ю.А. Дрозда (Одеса, 20-27 серпня 2015).

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків та використаних джерел, що містить 69 найменування. Повний обсяг дисертації — 124 сторінки, обсяг списку використаних джерел — 9 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ДОПОМІЖНІ ФАКТИ ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1. Огляд літератури за темою дисертації

Задача обчислення числа всіх розбиттів заданого натурального числа на цілі невід'ємні доданки має поважний вік. Вперше вона була сформульована Ляйбніцем в 1654 році, а в 1740 – запропонована Леонарду Ойлеру німецьким математиком Філіпом Ноде. Таким чином, перший систематичний підхід до вивчення розбиттів натурального числа зробив Л.Ойлер (див. [21], [23]). У 1741 р. він відкрив пентагональну теорему, оригінальне комбінаторне доведення якої було запропоновано Д. Франкліним [63]. Потужність множини невпорядкованих розбиттів натурального числа на натуральні доданки досліджували Г. Харді та С. Рамануджан. Вони отримали знамениту асимптотичну формулу, яку пізніше уточнив Г. Радемахер. Систематичний виклад теорії впорядкованих та невпорядкованих розбиттів натуральних чисел можна знайти у [24].

Впорядковані та невпорядковані розбиття натуральних чисел природно виникають у багатьох областях математики: комбінаториці, алгебрі, теорії чисел, алгебраїчній геометрії тощо. Вони, як правило, пов'язані із однорідними многочленами, похилими діаграмами, таблицями Юнга, деякими теоретико-числовими функціями.

Так біном Ньютона пов'язаний із розбиттям натурального

числа на два цілі невід'ємні доданки. Зауважимо, що біноміальна формула була відомою задовго до Ньютона. Арифметичний трикутник Паскаля був відомий Пінгале у II ст.до н.е. [58], китайському математику Яну Хуею (XIII ст.) та деяким ісламським математикам. У поліноміальній формулі, яка була відома ще Ляйбніцу [22] сума проводиться за всіма впорядкованими розбиттями натурального числа на цілі неві'дємні доданки. Цікаво, що поліноміальна теорема допускає суттєве узагальнення на факторіальні степені [17] та має аналоги, які пов'язані із диференціюванням добутку функцій.

У теорії симетричних многочленів багатьох змінних з'являються многочлени в яких суми обчислюються за всіма невпорядкованими розбиттями натурального числа на цілі невід'ємні доданки [50]. Такі многочлени називають многочленами розбиттів. Поняття многочленів розбиттів було запроваджене Беллом [15] у 1927 році. Під многочленом розбиттів Белл розумів однорідний многочлен степеня n від декількох змінних, означений при допомозі суми за різними невпорядкованими розбиттями натурального числа n на натуральні доданки. Тобто многочлени розбиттів мають вигляд

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+m\lambda_m=n} k(n, m; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\lambda_m},$$

де $k(n, m; \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ – деяка дробово-раціональна функція. Многочлени розбиттів були відомі задовго до Белла. Так, у 1762 році Е. Варінг опублікував книгу "Алгебраїчні міркування". В цій книзі він істотно розвинув теорію симетричних многочленів. Зокрема в ній він явно виражає орбітальні симетричні многочлени коренів алгебраїчного рівняння через степеневі суми цих

коренів (див. [56], стор. 394-404). Частинним випадком цього результату є вираження коефіцієнтів алгебраїчного рівняння через степеневі суми коренів цього рівняння. Сьогодні відомі і інші многочлени розбиттів, які пов'язують між собою степеневі суми, елементарні симетричні многочлени та повні однорідні симетричні многочлени [13]. Ці зв'язки можна також зобразити при допомозі матриць Хессенберга [65], які бієктивно пов'язані із парафункціями трикутних матриць [34].

S-функції виду

$$S_\lambda(x_1,\ldots,x_n)=\frac{det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\le i,j\le n}}{det\left(x_i^{n-j}\right)_{1\le i,j\le n}}$$

вперше вивчав Якобі у 1841 році у [38]. Ці функції є симетричними многочленами розбиттів. Їх можна також подати у вигляді детермінанта, елементами якого є повні однорідні симетричні многочлени:

$$S_\lambda(x_1,\ldots,x_n)=det\left(h_{\lambda_i-i+j}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

Останню тотожність називають тотожністю Якобі-Труді. У 1901 році Шур, у своїй дисертації [57] показав застосування цих многочленів у теорії зображень симетричних груп, започаткованої його співвітчизником Фробеніусом [64], тому пізніше Літтлвуд та Річардсон [49] назвали S-функції функціями Шура. Для множення функцій Шура використовують тотожність

$$S_\mu\cdot S_\nu=\sum_\lambda C_{\mu,\nu}^\lambda\cdot S_\lambda,$$

де $|\lambda|=|\mu|+|\nu|$. Коефіцієнти у цій формулі можна визначити при допомозі алгоритму, що зводить похилі таблиці до стандартних таблиць Юнга, тобто чисто комбінаторним методом.

Зауважимо, що у цьому абзаці ми використовуємо позначення із відомої монографії Макдональда [13].

У [52], [53] Ріордан запроваджує клас многочленів Белла, які являються узагальненням многочленів Луї Аброгаса (1800 р.) для n-тої похідної від складеної функції і подає цей широкий клас многочленів у вигляді

$$Y_n(fg_1, \ldots, fg_n) = \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n! f_k}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{\lambda_n},$$

де $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = k$ і $f^k = f_k$ (див. Символічне числення Бліссара). У своїй монографії "Комбінаторні тотожності Ріордан многочленам розбиттів присвячує цілий розділ (див. [52], стор.173-195.). Тут він досліджує обернені многочлени Белла, многочлени для похідних обернених функцій та розглядає застосування многочленів розбиттів у теорії чисел. Відзначимо, що многочлен розбиття Аброгаса у 1855 році Фаа ді Бруно подав у вигляді детермінанта. Сьогодні формула для обчислення n-тої похідної від складеної функції носить назву формули Фаа ді Бруно та узагальнена на випадок багатьох змінних.

Спряжені многочлени розбиттів до многочленів Белла запровадив Платонов [51].

Вивчаючи деякі циклічні підстановки Тушар [60] у 1939 році узагальнив многочлени розбиттів Белла та запровадив поліноми вигляду

$$T_{n,k}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) =$$

$$\sum_{\substack{(r_1+s_1)+\ldots+n(r_n+s_n)=n,\\ r_1+r_2+\ldots+r_n=k}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} r_i! s_i! i!^{r_i+s_i}} x_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{r_n} y_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{s_n}$$

Властивості поліномів Тушара вивчалися у [67] та [68]. Також поліноми Тушара вивчалися російськими математиками О.В. Кузьміним, О.В. Леоновою та А.А. Балагурою. Так, у [41], [42], [45] Кузьміним та Леоновою вивчалися застосування многочленів Тушара. Ними, зокрема, було встановлено деякі диференціально-різницеві рівняння та рекурентні співвідношення для поліномів Тушара. Також для коефіцієнтів поліномів наводяться рекурентні співвідношення та перелічувальні інтерпретації. Перелічувальні властивості многочленів розбиттів вивчалися у [14]. А у [43] та [44] досліджуються відповідно поліноми Тушара та C-поліноми Тушара і квазіортогональні до них поліноми. Тут квазіортогональність розуміється в сенсі взаємно обернених матриць, детермінанти яких є зображеннями відповідних поліномів. Зауважимо, що C-поліноми Тушара, пов'язані із цикловими індикаторами симетричних груп.

Тематика невпорядкованих розбиттів натурального числа, їх узагальнень та пов'язаних з ними теоретико-числових функцій залишається актуальною і сьогодні. m-арним розбиттям натурального числа присвячено чимало робіт. Їх різні аспекти досліджувалися у [12, 18, 19, 20, 48, 54, 55].

Окремо відзначимо роботу [46], в якій, при допомозі методу генератрис та лінійної алгебри, вивчаються зв'язки між функціями натурального аргументу $b_m(n), \xi_m(n)$, які узагальнюють відповідно число невпорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки $p(n)$, суму дільників натурального числа $\sigma(n)$, та функцією $d_m(n)$, яка при $m = 2$ дорівнює $(-1)^{t(n)}$, де $t(n)$ послідовність Туе-Морзе [11].

1.2. Допоміжні поняття та твердження

Основним апаратом, що використовуватиметься при дослідженні властивостей многочленів розбиттів є числення трикутних матриць, бо функції трикутних матриць – парадетермінант та парапермanent природно пов'язані із розбиттями натуральних чисел на натуральні доданки, а розкладання парафункцій трикутних матриць за елементами останнього рядка приводить до лінійних рекурентних рівнянь.

Наведемо основні поняття та твердження із числення трикутних матриць, які будуть використані в дисертаційній роботі. Нехай K — деяке числове поле.

Означення 1.1. [25], [26] *Трикутну таблицю*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1.1}$$

чисел із числового поля K назвемо трикутною матрицею, елемент a_{11} — верхнім елементом цієї трикутної матриці, а число n— її порядком.

Важливу роль у побудові парафункцій трикутних матриць відіграє факторіальний добуток їх елементів. Факторіальним добутком, що відповідає елементу a_{ij} матриці (1.1) називають добуток:

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Одним із можливих означень парафункцій трикутних матриць може слугувати наступне

Означення 1.2. [16] *Нехай A — трикутна матриця, тоді числа*

$$ddet(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$pper(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

називаються відповідно парадетермінантом та параперманентом трикутної матриці. Тут підсумовування проводиться за множиною натуральних розвя'зків рівняння
$p_1 + \ldots + p_r = n$.

Введемо поняття рогу трикутної матриці, при допомозі якого будується поняття алгебраїчного доповнення до елемента матриці.

Рогом трикутної матриці (1.1), що відповідає елементу a_{ij} називають трикутну матрицю з цим елементом у лівому нижньому куті і позначають через $R_{ij}(A)$. Таким чином, ріг $R_{ij}(A)$ є трикутною матрицею $(i - j + 1)$–го порядку і в ріг $R_{ij}(A)$ входять тільки ті елементи a_{rs} трикутної матриці (1.1), індекси яких задовольняють співвідношення $j \leqslant s \leqslant r \leqslant i$.

Прийнято вважати, що

$$\mathrm{ddet}\,(R_{01}(A)) = \mathrm{ddet}\,(R_{n,n+1}(A)) = \mathrm{pper}(R_{01}(A)) =$$

$$= \ \mathrm{pper}(R_{n,n+1}(A)) = 1.$$

Означення 1.3. [27] *Вписаною прямокутною таблицею в трикутну матрицю (1.1) називають таблицю, одна вершина якої*

збігається з елементом a_{n1}, а протилежна до неї — з елементом a_{ii}, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Таку таблицю будемо позначати через $T(i)$.

Аналогічно до того як детермінант можна розкладати за елементами певного рядка чи стовпця матриці, парадетермінант можна розкладати за елементами вписаної прямокутної таблиці в трикутну матрицю. Введемо поняття алгебраїчного доповнення до елемента трикутної матриці.

Означення 1.4. [26] *Парадетермінантним та параперманентним алгебраїчними доповненнями D_{ij}, P_{ij} до факторіального добутку $\{a_{ij}\}$ ключового елемента a_{ij} матриці (1.1) назвемо відповідно числа*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}),$$

$$P_{ij} = \operatorname{pper}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{pper}(R_{n,i+1}), \tag{1.2}$$

де $R_{j-1,1}$ і $R_{n,i+1}$ — роги трикутної матриці (1.1).

Параперманенти та парадетермінанти можна розкладати за елементами вписаної прямокутної таблиці. Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.1. [26] *Нехай A — трикутна матриця (1.1), а $T(i)$ — деяка вписана в неї прямокутна таблиця елементів. Тоді справедливі рівності:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} D_{rs}, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} P_{rs}, \tag{1.4}$$

де D_{rs} і P_{rs} — відповідно парадетермінантне та парапермanентне алгебричні доповнення до факторіального добутку ключового елемента a_{rs}, який належить таблиці $T(i)$.

Проте, частіше використовується розклад парафункцій трикутних матриць за елементами останнього рядка. Справедливий наступний наслідок із теореми 1.1.

Наслідок 1.1. [33] *Для довільної трикутної матриці (1.1) справедливі рівності, що забезпечують розклад парафункції трикутної матриці за елементами останнього рядка:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} D_{ns} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n+s} \{a_{ns}\} \cdot \operatorname{ddet}(R_{s-1,1}),$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} P_{ns} = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} \cdot \operatorname{pper}(R_{s-1,1}).$$

Теорема 1.2. [26] *Якщо A – трикутна матриця (1.1), то справедлива рівність*

$$pper(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = ddet((-1)^{\delta_{ij}+1}a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Наслідок 1.2. *Для довільної трикутної матриці*

$$(b_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$$

справедлива рівність

$$ddet(b_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = pper((-1)^{\delta_{ij}+1}b_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Цікавим є той факт, що парафункції трикутних матриць пов'язані з детермінантами матриць Хессенберга. Справедливі наступні теореми

Теорема 1.3. [28], [36] *Справедлива тотожність*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2} & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \left\langle \begin{array}{ccccccc} a_{11} & & & & & & \\ a_1\frac{a_{21}}{a_{22}} & a_{22} & & & & & \\ a_1\frac{a_{31}}{a_{32}} & a_2\frac{a_{32}}{a_{33}} & a_{33} & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & & & \\ a_1\frac{a_{n-2,1}}{a_{n-2,2}} & a_2\frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,3}} & a_3\frac{a_{n-2,3}}{a_{n-2,4}} & \dots & a_{n-2,n-2} & & \\ a_1\frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,2}} & a_2\frac{a_{n-1,2}}{a_{n-1,3}} & a_3\frac{a_{n-1,3}}{a_{n-1,4}} & \dots & a_{n-2}\frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-1}} & a_{n-1,n-1} & \\ a_1\frac{a_{n1}}{a_{n2}} & a_2\frac{a_{n2}}{a_{n3}} & a_3\frac{a_{n3}}{a_{n4}} & \dots & a_{n-2}\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & a_{n-1}\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & a_{nn} \end{array} \right\rangle \tag{1.5}$$

Теорема 1.4. [28] *Справедлива тотожність*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-2} & -a_{n-2} & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & -a_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & \\ a_1\frac{a_{21}}{a_{22}} & a_{22} & & & & & \\ a_1\frac{a_{31}}{a_{32}} & a_2\frac{a_{32}}{a_{33}} & a_{33} & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & & & \\ a_1\frac{a_{n-2,1}}{a_{n-2,2}} & a_2\frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,3}} & a_3\frac{a_{n-2,3}}{a_{n-2,4}} & \dots & a_{n-2,n-2} & & \\ a_1\frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,2}} & a_2\frac{a_{n-1,2}}{a_{n-1,3}} & a_3\frac{a_{n-1,3}}{a_{n-1,4}} & \dots & a_{n-2}\frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-1}} & a_{n-1,n-1} & \\ a_1\frac{a_{n1}}{a_{n2}} & a_2\frac{a_{n2}}{a_{n3}} & a_3\frac{a_{n3}}{a_{n4}} & \dots & a_{n-2}\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & a_{n-1}\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Означення 1.5. *Многочленами розбиттів називають многочлени виду*

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\lambda_1+\dots+n\lambda_n=n} c(n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $c(n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – деяка дробово- раціональна функція своїх коефіцієнтів.

Зауважимо, що довільний многочлен розбиттів може бути виражений у вигляді парафункції трикутних матриць похилого вигляду. Взагалі, справедлива наступна теорема

Теорема 1.5. [34] *Нехай*

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \dots & \tau_{n-1,n-1}x_1 \\ \tau_{n,1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n,2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & \tau_{n,n-1}\frac{x_2}{x_1} \quad \tau_{nn}x_1 \end{pmatrix}$$

– деяка трикутна матриця, в якій τ_{ij} – деякі раціональні функції аргументів i та j, тоді справедливі рівності

$$ddet(A) = \sum_{\lambda_1+\dots+n\lambda_n=n} c_1(n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$pper(A) = \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=n} c_2(n;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

В подальшому нам знадобиться поняття скалярного добутку вектора на парафункцію трикутної матриці.

Означення 1.6. [31] *Скалярним добутком вектора*

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

на парадетермінант трикутної матриці (1.1) назвемо число

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n \stackrel{def}{=} \tag{1.7}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} b_r \cdot \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{p_1+\ldots+p_s,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\right\}.$$

Аналогічно визначається скалярний добуток вектора на параперманент трикутної матриці.

Означення 1.7. *Скалярним добутком вектора* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *на параперманент трикутної матриці (1.1) назвемо число*

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)\cdot \mathrm{pper}(A) \stackrel{def}{=} \sum_{r=1}^{n} b_r \cdot \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{p_1+\ldots+p_s,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\right\}. \tag{1.8}$$

Теорема 1.6. [32] *Добуток вектора на парафункцію трикутної матриці виду* $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *є многочленом розбиттів, тобто виконуються рівності:*

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \mathrm{pper}(A(x_1, x_2, \ldots, x_n)) =$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} y_m \cdot c(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n} \qquad (1.9)$$

$$(y_1,y_2,\ldots,y_n)\cdot \mathrm{ddet}(A(x_1,x_2,\ldots,x_n)) =$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} (-1)^{n-m} y_m \cdot c(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}. \qquad (1.10)$$

Означення 1.8. *Многочлен розбиттів*

$$x_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} d(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot y_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}$$

називають оберненим до многочлена розбиттів

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} c(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

якщо підстановка першого многочлена розбиттів, при $i = 1,2,\ldots,n$, *у другий многочлен розбиттів приводить до тотожності* $y_n = y_n$.

Такі пари взаємно обернених многочленів розбиттів виникають, зокрема, у теорії чисел (див. [34], стор. 304-307) та теорії симетричних многочленів (див. [34], стор. 336-338).

Апарат числення трикутних матриць дозволяє ефективно будувати взаємно обернені многочлени розбиттів. Вони будуються при допомозі наступної теореми.

Теорема 1.7. [29], [30], [35] *Справедливі наступні пари рівностей:*

1)

$$b_i = \left\langle \tau_{s,r} \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}$$

$$a_i = \left\langle \tau^{-1}_{s,s-r+1} \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i}, i = 1, 2...;$$

2)

$$b_i = \left[\tau_{sr} \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right]_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i},$$

$$a_i = (-1)^{i-1} \left\langle \tau^{-1}_{s,s-r+1} \frac{b_s - r + 1}{b_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i}, i = 1, 2....$$

Надалі нам знадобиться також теорема [37]:

Теорема 1.8. *Нехай*

$$Z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & & & & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & x_1 & & & \\ 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix}_m,$$

$n \leqslant m$, тоді справедливі тотожності:

$$\operatorname{pper}(Z_m(x_1, \ldots, x_n)) =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = m} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{ddet}(Z_m(x_1, \ldots, x_n)) =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = m} (-1)^{m - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \times$$

$$\times x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ *— цілі невід'ємні числа.*

Наведемо приклади важливих многочленів розбиттів. Многочлен вигляду

$$B(fx_1, fx_2, \ldots, fx_n) =$$
$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n! f_k}{\lambda_1!1!^{\lambda_1}\lambda_2!2!^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_n!n!^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $f^k = f_k$, називають многочленами Белла (див. [52], стор 173). Вони виникають при диференціюванні складених функцій (формула Фаа ді Бруно), при оберненні формальних степеневих рядів тощо. У [34] доведено, що многочлени Белла, при $f = 1$, зображуються у вигляді парапермanента трикутної матриці

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{1}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{x_3}{x_2} & \frac{2}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{1}{n-1} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{2}{n-2} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{n-1}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \left(\frac{j}{i-j+j \cdot \delta_{ij}} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_{1 \le j \le i \le n}, \qquad (1.12)$$

яку названо трикутною матрицею Белла.

Многочлен розбиття вигляду

$$C_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n!n^{\lambda_n}} \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}$$

називають цикловим індикатором симетричної групи. Його можна зобразити у вигляді парапермanента

$$\left[(j - (j-1) \cdot \delta_{ij}) \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right]_{1 \le j \le i \le n}.$$

Як відомо теоретико-числовими функціями (арифметичними) називають функції задані на множині натуральних чисел. Теоретико-числові функції відіграють важливу роль у теорії чисел, комбінаторному аналізі, алгебрі, криптографії тощо. Такими функціями являються функції Ойлера, Мебіуса, дзета-функція Рімана, сума дільників та число розбиттів натурального числа та різноманітні їх узагальнення. У останньому розділі дисертації нам знадобляться деякі відомості про теоретико-числову функцію Мебіуса та функції $\sigma(n)$ та $p(n)$.

Нехай $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$, тоді функція Мебіуса $\mu(n)$ задається рівністю

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^s, & \text{якщо } k_1 \cdot \ldots \cdot k_s = 1, \\ 0, & \text{якщо } k_1 \cdot \ldots \cdot k_s > 1. \end{cases}$$

Відомо, що функція Ойлера пов'язана з функцією Мебіуса рівністю

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

а також, що справедлива рівність

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} n = 1, \\ 0, & \text{якщо} n > 1. \end{cases}$$

Важливою теоремою теорії чисел є теорема про формули обернення арифметичних функцій f і g.

Теорема 1.9. *Якщо f і g – арифметичні функції такі, що для довільного натурального числа n виконується рівність*

$$\sum_{d|n} f(d) = g(n),$$

то для довільного натурального числа n також виконується рівність

$$\sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d) = f(n).$$

Нехай $p(n)$ – число невпорядкованих розбиттів натурального числа n в суму натуральних доданків, а $\sigma(n)$ – сума всіх натуральних дільників даного числа n. У [66], на стор. 58, наводиться тотожність

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty} p(i)x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} p(i)x^i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sigma(i)x^{i-1}\right).$$

Із цієї тотожності можна вивести [34] два взаємно обернені многочлени розбиттів

$$\sigma(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)-1}\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n-1)!n}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}p(1)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot p(n)^{\lambda_n} \tag{1.13}$$

$$p(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{1}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}(\sigma(1))^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(\sigma(n))^{\lambda_n} \tag{1.14}$$

та їх зображення у вигляді парафункцій трикутних матриць:

$$p(n) = \begin{bmatrix} \sigma(1) & & & & \\ \frac{\sigma(2)}{\sigma(1)} & \frac{1}{2}\cdot\sigma(1) & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{\sigma(n-1)}{\sigma(n-2)} & \frac{\sigma(n-2)}{\sigma(n-3)} & \ldots & \frac{1}{n-1}\cdot\sigma(1) & \\ \frac{\sigma(n)}{\sigma(n-1)} & \frac{\sigma(n-1)}{\sigma(n-2)} & \ldots & \frac{\sigma(2)}{\sigma(1)} & \frac{1}{n}\cdot\sigma(1) \end{bmatrix}_n \tag{1.15}$$

$$\sigma(n) = (-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{cccccc} p(1) & & & & & \\ 2\cdot\frac{p(2)}{p(1)} & p(1) & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ (n-1)\frac{p(n-1)}{p(n-2)} & \frac{p(n-2)}{p(n-3)} & \dots & p(1) & & \\ n\frac{p(n)}{p(n-1)} & \frac{p(n-1)}{p(n-2)} & \dots & \frac{p(2)}{p(1)} & p(1) & \end{array} \right\rangle_n \tag{1.16}$$

Нехай $b_m(n)$ – число m-арних розбиттів натурального числа n, на степені числа m.

Генератрисою функції натурального аргументу $b_m(n)$ слугує функція

$$f_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_m(n)x^n = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - x^{m^n})^{-1}.$$

При $m = 2$ отримаємо бінарні розбиття натурального числа n на степені двійки. Наприклад, існує чотири бінарні розбиття натурального числа 5 :

$$\begin{aligned} 5 = &\ 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0, \\ 5 = &\ 2^1 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0, \\ 5 = &\ 2^1 + 2^1 + 2^0, \\ 5 = &\ 2^2 + 2^0. \end{aligned}$$

У 1750 році Ойлер встановив рекурентні співвідношення для обчислення числа бінарних розбиттів натурального числа n :

$$b_2(2n+1) = b_2(2n),$$

$$b_2(2n) = b_2(2n-1) + b_2(n), b_2(0) = 1.$$

Нехай $\xi_m(n)$ – сума всіх дільників натурального числа n, що є степенями числа m. Наприклад,

$$\xi_2(1) = 2^0 = 1,$$

$$\xi_2(2) = 2^0 + 2^1 = 3,$$
$$\xi_2(3) = 2^0 = 1,$$
$$\xi_2(4) = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 7,$$
$$\xi_2(5) = 2^0 = 1,$$
$$\xi_2(6) = 2^0 + 2^1 = 3.$$

Прийнято вважати, що $\xi_m(0) = 1$. Очевидно, що функція натурального аргументу $\xi_m(n)$, при $m = 1$, співпадає з функцією натурального аргументу $\sigma(n)$.

Поряд із означеними вище двома функціями натурального аргументу $b_m(n)$ і $\xi_m(n)$, розглядають ще одну функцію натурального аргументу $d_m(n)$, генератрисою якої є функція

$$g_m(x) = \frac{1}{f_m(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_m(n)x^n = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - x^{m^n}).$$

Зазначимо, що функцію $d_m(n)$ можна задати ще так:

$$d_m(n)=\begin{cases}0, \text{якщо n не є сумою різних степенів числа m}\\ 1, \text{якщо n є сумою парного числа різних степенів числа m}\\ -1, \text{якщо n є сумою непарного числа різних степенів числа m},\end{cases}$$

причому $d_m(0) = 1$.

Наведемо кілька перших членів числової послідовності $d_m(n)$ при $m = 3$:

$$d_3(1) = -1, d_3(2) = 0, d_3(3) = -1, d_3(4) = 1, d_3(5) = 0, d_3(6) = 0,$$
$$d_3(7) = 0, d_3(8) = 0, d_3(9) = -1, d_3(10) = 1.$$

Наведені вище три функції натурального аргументу та їхні зв'язки вивчалися у статті [46]. У цій роботі було доведено наступні три теореми:

Теорема 1.10. *Для довільного натурального n, m-арні розбиття $b_m(n)$ можна подати у вигляді многочлена розбиттів*

$$b_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{1}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\lambda_2!2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}\xi_m(1)^{\lambda_1}\times$$

$$\times\xi_m(2)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\xi_m(n)^{\lambda_n}.$$

У наступній теоремі зв'язки між функціями $b_m(n)$ та $d_m(n)$ виражаються при допомозі матриць Хессенберга.

Теорема 1.11. *Для довільного натурального n справедливі рівності:*

$$b_m(n) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} d_m(1) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_m(2) & d_m(1) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ d_m(n-1) & d_m(n-2) & d_m(n-3) & \cdots & 1 \\ d_m(n) & d_m(n-1) & d_m(n-2) & \cdots & d_m(1) \end{pmatrix},$$

$$d_m(n) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} b_m(1) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_m(2) & b_m(1) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_m(n-1) & b_m(n-2) & b_m(n-3) & \cdots & 1 \\ b_m(n) & b_m(n-1) & b_m(n-2) & \cdots & b_m(1) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.12. *Для довільного натурального n справедливі рівності:*

$$b_m(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \xi_m(n-j)b_m(j),$$

$$d_m(n) = -\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \xi_m(n-j)d_m(j).$$

Наведемо також коротенькі відомості про основні симетричні многочлени та їх зображення парафункціями трикутних матриць. Нехай

$$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

— симетричні многочлени задані відповідними генератрисами. Встановимо три можливі пари формул обернення між цими симетричними многочленами. Генератриси цих многочленів задовольняють співвідношення

$$\sigma(z)p(-z) = 1,$$

$$p(z)s(z) = p^{'}(z),$$

$$\sigma(z)s(-z) = -\sigma^{'}(z).$$

Зрівнюючи коефіцієнти біля z^k, отримаємо три рекурентні рівняння:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_i p_{k-i} = 0,$$

$$kp_k = \sum_{i=1}^{k} s_i p_{k-i},$$

$$k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1} s_i \sigma_{k-i}.$$

Перша рекурентна рівність дає дві формули обернення. Інші дві запишемо відповідно у вигляді:

$$p_k = \frac{s_1}{k}\cdot p_{k-1} + \frac{s_2}{k}\cdot p_{k-2} + \ldots + \frac{s_{k-1}}{k}\cdot p_1 + \frac{s_k}{k},$$

$$\sigma_k = \frac{s_1}{k}\sigma_{k-1} - \frac{s_2}{k}\cdot\sigma_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-2}s_{k-1}\sigma_1 + (-1)^{k-1}s_1.$$

Праві частини цих рівностей можуть бути виражені відповідно через параперманент та парадетермінант

$$p_k = \begin{bmatrix} s_1 & & & & \\ \frac{s_2}{s_1} & \frac{s_1}{2} & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & \frac{s_{k-2}}{s_{k-3}} & \ldots & \frac{s_1}{k-1} & \\ \frac{s_k}{s_{k-1}} & \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & \ldots & \frac{s_2}{s_1} & \frac{s_1}{k} \end{bmatrix}_k,$$

$$\sigma_k = \left\langle \begin{matrix} s_1 & & & & \\ \frac{s_2}{s_1} & \frac{s_1}{2} & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & \frac{s_{k-2}}{s_{k-3}} & \ldots & \frac{s_1}{k-1} & \\ \frac{s_k}{s_{k-1}} & \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & \ldots & \frac{s_2}{s_1} & \frac{s_1}{k} \end{matrix} \right\rangle_k.$$

Користуючись теоремою 1.7, легко записати відповідні обернені співвідношення:

$$s_k = (-1)^{k-1}\left\langle \begin{matrix} p_1 & & & & \\ 2\cdot\frac{p_2}{p_1} & p_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ (k-1)\cdot\frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} & \frac{p_{k-2}}{p_{k-3}} & \ldots & p_1 & \\ k\cdot\frac{p_k}{p_{k-1}} & \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} & \ldots & \frac{p_2}{p_1} & p_1 \end{matrix} \right\rangle_k$$

$$s_k = \left\langle \begin{matrix} \sigma_1 & & & & \\ 2\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ (k-1)\cdot\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_{k-2}} & \frac{\sigma_{k-2}}{\sigma_{k-3}} & \ldots & \sigma_1 & \\ k\cdot\frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}} & \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_{k-2}} & \ldots & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 \end{matrix} \right\rangle_k.$$

Зауважимо, що отримані три пари формул обернення многочленів розбиттів можна було отримати із відповідних формул обернення, в яких симетричні многочлени виражаються через квазітрикутні матриці, або такі, що легко до них зводяться.

1.3. Основні напрямки та результати досліджень

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації та подано загальну характеристику дисертації, а саме визначені мета, предмет, об‘єкт та методи досліджень; вказано наукову новизну отриманих результатів.

Перший розділ присвячений розгляду допоміжних понять та тверджень, що використовуються у дисертаційній роботі та огляду літератури за темою дисертації. Він складається з трьох підрозділів.

У підрозділі 1.1 зроблено огляд літератури за темою дисертації.

Підрозділ 1.2 присвячений розгляду відомих допоміжних понять та тверджень, що використовуються у наступних розділах дисертації.

У підрозділі 1.3 вказано основні напрямки та результати досліджень.

Другий розділ дисертації присвячено дослідженню зображень многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць. Тут, зокрема, запроваджено широкі класи многочленів розбиттів до яких належать як відомі так і нові многочлени розбиттів та досліджено їх зв’язки з лінійними рекурентними співвідношеннями. До них зокрема відносяться такі многочлени розби-

ттів як: повні однорідні симетричні многочлени, клас многочленів Белла та Аброгаса, циклові індикатори симетричних груп, многочлени із формули Варінга тощо. Такий підхід дозволяє уніфікувати та систематизувати дослідження многочленів розбиттів.

У підрозділі 2.1 досліджуються два класи взаємно обернених многочленів розбиттів. При аналізі цих многочленів з'являються відомі та невідомі числові трикутники та послідовності. Зауважимо, що досі відомі лише поодинокі пари взаємно обернених многочленів розбиттів. У цьому підрозділі, зокрема, доводяться такі теореми:

Теорема 2.1. *Справедливі рівності:*

$$y_n = \left\langle \begin{array}{cccccc} a_1x_1 & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & & & \\ \frac{a_3}{a_2}\frac{x_3}{x_2} & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} k! \frac{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots,$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{cccccc} \frac{1}{a_1}y_1 & & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_1}{a_2}y_1 & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_3}{y_2} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_2}{a_3}y_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1 & \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \frac{1}{a_n} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

При цьому наведені взаємно обернені многочлени розбиттів задовольняють відповідно рекурентні рівності:

$$y_n = a_1x_1y_{n-1} - a_2x_2y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}a_{n-1}x_{n-1}y_1 + (-1)^{n-1}a_nx_ny_0,$$

де $y_0 = 1, y_{<0} = 0$.

$$x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1x_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n}y_2x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{a_1}{a_n}y_{n-1}x_1 + \\ + (-1)^{n-1}\frac{1}{a_n}y_nx_0,$$

де $x_0 = 1, x_{<0} = 0$.

Відзначимо, що вивчення многочленів розбиттів при допомозі апарату числення трикутних матриць, дозволяє запровадити многочлени розбиттів із знаками та без знаків. Многочлени розбиттів без знаків дає наступна

Теорема 2.2. *Для взаємно обернених многочленів розбиттів справедливі рівності:*

$$y_n = \begin{bmatrix} a_1x_1 & & & & \\ \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & & \\ \frac{a_3}{a_2}\frac{x_3}{x_2} & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 \end{bmatrix}_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} k!\frac{a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots$$

$$x_n = (-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{cccccc} \frac{1}{a_1}y_1 & & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_1}{a_2}y_1 & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_3}{y_2} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_2}{a_3}y_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1 & \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \frac{1}{a_n} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k-1} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Взаємно обернені многочлени розбиттів задовольняють відповідно рекурентні співвідношення:

$$y_n = a_1 x_1 y_{n-1} + a_2 x_2 y_{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} y_1 + a_n x_n y_0,$$

$y_0 = 1, y_{<0} = 0$

$$x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_1 x_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n} y_2 x_{n-2} - \ldots - \frac{a_1}{a_n} y_{n-1} x_1 + \frac{1}{a_n} y_n x_0,$$

$x_0 = 1, x_{<0} = 0.$

Далі, у цьому підрозділі, наводяться приклади многочленів розбиттів, що належать до цього класу та відповідні їм числові послідовності.

У підрозділі 2.2 досліджено клас многочленів розбиттів, що зображуються парафункціями трикутних матриць похилої структури з першим довільним стовпцем. До цього класу належать ряд відомих многочленів розбиттів, що зустрічаються у алгебрі. Прикладом таких многочленів слугують многочлени розбиттів, в яких степеневі суми виражаються через елементарні симетричні многочлени або через повні однорідні симетричні многочлени. Аналогічні приклади можна знайти також

у теорії чисел. Теоретичною основою цього підрозділу дисертаційної роботи є теореми 2.3. та 2.4:

Теорема 2.3. *Нехай многочлени*

$$y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), n = 0, 1, \ldots$$

задаються рекурентним співвідношенням

$$y_n = x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} a_n x_n y_0,$$

де $y_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$y_n = \operatorname{ddet} \begin{pmatrix} a_1 x_1 & & & \\ a_2 \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_n \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix},$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right) \frac{(k-1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \times \\ \times x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Теорема 2.4. *Нехай многочлени*

$$y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), n = 0, 1, \ldots$$

задані рекурентним співвідношенням

$$y_n = x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \ldots + x_{n-1} y_1 + a_n x_n y_0,$$

де $y_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$y_n = \operatorname{pper} \begin{pmatrix} a_1 x_1 & & & \\ a_2 \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_n \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix},$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

У підрозділі 2.3 доводяться теореми про відповідні обернені многочлени розбиттів, які розглянуті у теоремах 2.3. та 2.4.

Теорема 2.5. *Нехай многочлени*

$$x_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), n = 0, 1, \ldots$$

задані рекурентним співвідношенням

$$x_n = a_n y_1 x_{n-1} - a_n y_2 x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} a_n y_{n-1} x_1 + (-1)^{n-1} a_n y_n x_0,$$

де $x_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$x_n = \mathrm{ddet} \begin{pmatrix} a_1 y_1 & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & a_2 y_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & a_n y_1 \end{pmatrix},$$

$$x_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=n} a_{\alpha_1} a_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot\ldots\cdot a_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r} y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \cdot\ldots\cdot y_{\alpha_r},$$

де $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \ldots, r$.

Теорема 2.6. *Нехай многочлени*

$$x_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), n = 0, 1, \ldots$$

задані рекурентним співвідношенням

$$x_n = a_n y_1 x_{n-1} + a_n y_2 x_{n-2} + \ldots + a_n y_{n-1} x_1 + a_n y_n x_0,$$

де $x_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$x_n = \operatorname{pper} \begin{pmatrix} a_1 y_1 & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & a_2 y_1 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & a_n y_1 \end{pmatrix},$$

$$x_n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=n} a_{\alpha_1} a_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r} y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot y_{\alpha_r},$$

де $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \ldots, r$.

Підрозділ 2.4 присвячено дослідженню многочленів розбиттів, які зображуються парафункціями трикутних матриць похилої структури з двома першими довільними стовпцями. Це дуже широкий клас многочленів розбиттів, однак досі, в існуючій літературі, многочлени цього класу не з'являлися. Центральною теоремою цього підрозділу є

Теорема 2.7. *Якщо многочлени задані рекурентним рівнянням*

$$y_n = x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} + x_3 y_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-3} x_{n-2} y_2 +$$

$$+ (-1)^{n-2} \tau_{n2} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} \tau_{n1} \tau_{n2} x_n y_0,$$

де $y_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$y_n = \left\langle \begin{matrix} \tau_{11} x_1 & & & & \\ \tau_{21} \frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} x_1 & & & \\ \tau_{31} \frac{x_3}{x_2} & \tau_{32} \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ \tau_{n-1,1} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2} \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \dots & x_1 \\ \tau_{n1} \frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \dots & \frac{x_2}{x_1} \quad x_1 \end{matrix} \right\rangle_n$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{A(\lambda,\tau)}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

де

$$A(\lambda,\tau) = \left(\lambda_1(\lambda_1-1)\tau_{11}\tau_{22} + \sum_{i=2}^{n-1}\lambda_1\lambda_i\tau_{11}\tau_{i+1,2}\right)\cdot(k-2)! + \\ + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2}\cdot(k-1)!$$

Наведена теорема узагальнює теорему 2.3.

У підрозділі 2.5 доведено загальну теорему про зображення многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць, однак алгоритми побудови таких многочленів розбиттів відзначаються складністю за кількістю операцій. Ця теорема описує всі многочлени розбиттів, які будь-коли можуть з'явитися в тому чи іншому розділі математики.

Теорема 2.9. *Рівності*

$$y_n = \left\langle \begin{array}{cccc} \tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{n-1,n-1}x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & \tau_{n,n-1}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{nn}x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$y_n = x_1y_{n-1} - x_2y_{n-2} + x_3y_{n-3} - \ldots + \\ (-1)^{n-m-1}x_{n-m}y_m + (-1)^{n-m}\{\tau_{nm}\}_m x_{n-m+1}\times \\ \times y_{m-1} + (-1)^{n-m+1}\{\tau_{n,m-1}\}_m x_{n-m+2}y_{m-2} +$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\{\tau_{n1}\}_m x_n y_0$$

$$y_n=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}\sum_{i=m}^{n}A(\lambda,\tau,i)\times$$
$$\times\frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!},$$

де $\tau_{ij}=1$ *при* $m+1\le j\le n$,

$$A(\lambda,\tau,i)=$$

$$\sum_{r=1}^{m}(k-r)!\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=m,\\ \alpha_j\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},j=1,\ldots,r}}\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_{r-1}}\lambda_{i-m+\alpha_r}\times$$

$$\times\{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m\prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m,$$

причому

$$\underbrace{\lambda_{\alpha_j}\lambda_{\alpha_j}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_j}}_{k}=\lambda_{\alpha_j}^{\underline{k}}=$$

$$=\lambda_{\alpha_j}(\lambda_{\alpha_j}-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda_{\alpha_j}-k+1),\ j=1,\ldots,r,$$

рівносильні між собою.

Важливим виявляється наслідок цієї теореми.

Наслідок 2.7. *Наступні рівності рівносильні між собою:*

$$y_n=\left\langle\begin{array}{cccc}\tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{n-1,n-1}x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & \tau_{n,n-1}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{nn}x_1\end{array}\right\rangle_n$$

$$y_n = \{\tau_{nn}\}x_1 y_{n-1} - \{\tau_{n,n-1}\}x_2 y_{n-2} +$$
$$+\{\tau_{n,n-2}\}x_3 y_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2}\{\tau_{n2}\}x_{n-1} y_1 +$$
$$+(-1)^{n-1}\{\tau_{n1}\}x_n y_0$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} A(\lambda,\tau,n)\frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!},$$

де

$$A(\lambda,\tau,n) = \begin{pmatrix} (k-1)! \\ (k-2)! \\ \vdots \\ (k-n)! \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \lambda_1\tau_{11} & & & \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\tau_{21} & \lambda_1\tau_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\tau_{n1} & \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}}\tau_{n2} & \ldots & \lambda_1\tau_{nn} \end{bmatrix},$$

де добуток

$$\underbrace{\lambda_i\cdot\ldots\cdot\lambda_i}_{k}$$

розглядається як спадний факторіальний степінь $\lambda_i^{\underline{k}}$.

Третій розділ дисертації присвячений вивченню деяких теоретико-числових функцій пов'язаних із многочленами розбиттів та лінійними рекурентними співвідношеннями. Зокрема,

у першому підрозділі цього розділу, при допомозі апарату числення трикутних матриць, доводяться ще три теореми, які встановлюють додаткові зв'язки між m-арними числами $b_m(n), \xi_m(n), d_m(n)$, що розглядалися в [46].

Наведемо дві теореми цього розділу.

Перша теорема цього розділу присвячена зображенню m-арних чисел у вигляді парафункцій трикутних матриць.

Теорема 3.1. *Справедливі рівності:*

$$b_m(n) = \begin{bmatrix} \xi_m(1) & & & & \\ \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & \frac{1}{2}\xi_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \frac{\xi_m(n-2)}{\xi_m(n-3)} & \dots & \frac{1}{n-1}\xi_m(1) & \\ \frac{\xi_m(n)}{\xi_m(n-1)} & \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \dots & \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & \frac{1}{n}\xi_m(1) \end{bmatrix},$$

$$d_m(n) = \begin{bmatrix} -\xi_m(1) & & & & \\ \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & -\frac{1}{2}\xi_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \frac{\xi_m(n-2)}{\xi_m(n-3)} & \dots & -\frac{1}{n-1}\xi_m(1) & \\ \frac{\xi_m(n)}{\xi_m(n-1)} & \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \dots & \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & -\frac{1}{n}\xi_m(1) \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^n \left\langle \begin{array}{ccccc} \xi_m(1) & & & & \\ \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & \frac{1}{2}\xi_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \frac{\xi_m(n-2)}{\xi_m(n-3)} & \dots & \frac{1}{n-1}\xi_m(1) & \\ \frac{\xi_m(n)}{\xi_m(n-1)} & \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \dots & \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & \frac{1}{n}\xi_m(1) \end{array} \right\rangle,$$

$$\xi_m(n) = (-1)^{n-1}\left\langle \begin{matrix} b_m(1) & & & & \\ 2\cdot\frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ (n-1)\cdot\frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \frac{b_m(n-2)}{b_m(n-3)} & \dots & b_m(1) & \\ n\cdot\frac{b_m(n)}{b_m(n-1)} & \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \dots & \frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) \end{matrix} \right\rangle,$$

$$\xi_m(n) =$$

$$= (-1)^{n-1}\left\langle \begin{matrix} -d_m(1) & & & & \\ -2\cdot\frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ -(n-1)\cdot\frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \frac{d_m(n-2)}{d_m(n-3)} & \dots & d_m(1) & \\ -n\cdot\frac{d_m(n)}{d_m(n-1)} & \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \dots & \frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= (-1)^{n}\left\langle \begin{matrix} d_m(1) & & & & \\ 2\cdot\frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ (n-1)\cdot\frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \frac{d_m(n-2)}{d_m(n-3)} & \dots & d_m(1) & \\ n\cdot\frac{d_m(n)}{d_m(n-1)} & \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \dots & \frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) \end{matrix} \right\rangle,$$

$$b_m(n) = (-1)^{n}\left\langle \begin{matrix} d_m(1) & & & & \\ \frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \frac{d_m(n-2)}{d_m(n-3)} & \dots & d_m(1) & \\ \frac{d_m(n)}{d_m(n-1)} & \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \dots & \frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) \end{matrix} \right\rangle,$$

$$d_m(n) = (-1)^{n}\left\langle \begin{matrix} b_m(1) & & & & \\ \frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \frac{b_m(n-2)}{b_m(n-3)} & \dots & b_m(1) & \\ \frac{b_m(n)}{b_m(n-1)} & \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \dots & \frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) \end{matrix} \right\rangle.$$

Наведемо ще одну теорему, в якій встановлено многочлени разбиттів, які пов'язують між собою m-арні числа $b_m(n), \xi_m(n), d_m(n)$.

Теорема 3.3. *Справедливі рівності:*

$$d_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^k \frac{\xi_m^{\lambda_1}(1)\cdot\ldots\cdot\xi_m^{\lambda_n}(n)}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n! 1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}},$$

$$\xi_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k-1} \frac{n(k-1)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot b_m^{\lambda_1}(1)\cdot\ldots\cdot b_m^{\lambda_n}(n),$$

$$\xi_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k} \frac{n(k-1)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot d_m^{\lambda_1}(1)\cdot\ldots\cdot d_m^{\lambda_n}(n),$$

$$b_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k} \frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot d_m^{\lambda_1}(1)\cdot\ldots\cdot d_m^{\lambda_n}(n),$$

$$d_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k} \frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot b_m^{\lambda_1}(1)\cdot\ldots\cdot b_m^{\lambda_n}(n),$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

У підрозділі 3.2. знайдено мебіус-функцію $\mu(C, B)$ для ч.в.м. $(P(A), \subseteq)$, де $P(A)$ – мультибулеан мультимножини

$$A = \{x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}\}$$

Теорема 3.4. *Мебіус-функція* $\mu(C, B)$ *частково впорядкованої множини* $(P(A), \subseteq)$ *має вигляд*

$$\mu(C,B) = \begin{cases} (-1)^{|B-C|}, & \text{якщо } B-C = [B-C], \\ 0, & \text{якщо } B-C \neq [B-C], \end{cases}$$

де

$$C \subseteq B \in (P(A), \subseteq),$$

а $[X]$*- база мультимножини* X*.*

Наступна теорема є модифікацією класичної теоретико-числової теореми обернення.

Теорема 3.5. *Якщо* $f(X)$ *і* $g(X)$ *визначені на частково впорядкованій множині* $(P(A), \subseteq)$ *функції, причому виконується рівність*

$$\sum_{X \subseteq B} f(X) = g(B),$$

то виконується рівність

$$\sum_{X \subseteq B} \mu(X) \cdot g(B - X) = f(B).$$

РОЗДІЛ 2

ЗОБРАЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ РОБИТТІВ ПАРАФУНКЦІЯМИ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

Як зазначалося у першому розділі, многочлени розбиттів із знаками у найзагальнішому вигляді можуть бути подані у вигляді

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} (-1)^{n-m} y_m \cdot c(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

а без знаків – у вигляді

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} y_m \cdot c(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

При цьому вони можуть зображуватися відповідно наступними скалярними добутками вектора на парафункції трикутних матриць:

$$y\cdot ddet(A(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

$$y\cdot pper(A(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

де $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ а

$$A(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{pmatrix} \tau_{11}x_1 & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \ldots & \tau_{n-1,n-1}x_1 & \\ \tau_{n,1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n,2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \tau_{n,n-1}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{nn}x_1 \end{pmatrix}$$

Якщо ж $y_i=1, i=1,2,\ldots,n$, то многочлени розбиттів зображуються парафункціями трикутних матриць, які після

розкладу за елементами останнього рядка дають лінійні рекурентні співвідношення для обчислення многочленів розбиттів.

Таким чином, при допомозі зображень многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць, з'являється можливість уніфікувати дослідження довільних многочленів розбиттів. Крім цього, позаяк властивості парафункцій трикутних матриць добре вивчені [34], то при їх допомозі можна виявити нові властивості многочленів розбиттів.

Такий підхід до вивчення многочленів розбиттів допомагає виявляти нові класи многочленів розбиттів та нові властивості відомих многочленів розбиттів. При цьому встановлюються бієкції між многочленами розбиттів, парафункціями відповідних трикутних матриць похилої структури та відповідними лінійними рекурентними співвідношеннями, які дають ефективні алгоритми генерування многочленів розбиттів.

2.1. Два класи взаємно обернених многочленнів розбиттів

У цьому параграфі ми дослідимо деякі класи взаємно обернених многочленів розбиттів, що генеруються парафункціями трикутних матриць похилої структури. Виявляється, що многочлени розбиттів, що належать до цього класу при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ генерують відомі та нові числові послідовності.

Спочатку розглянемо наступну загальну теорему:

Теорема 2.1. *Справедливі рівності:*

$$y_n = \left\langle \begin{array}{cccccc} a_1x_1 & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & & & \\ \frac{a_3}{a_2}\frac{x_3}{x_2} & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} k! \frac{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{cccccc} \frac{1}{a_1}y_1 & & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_1}{a_2}y_1 & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_3}{y_2} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_2}{a_3}y_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1 & \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \frac{1}{a_n} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

При цьому взаємно обернені многочлени розбиттів (2.1), (2.2) задовольняють відповідно рекурентні рівності:

$$\begin{aligned} y_n = a_1x_1y_{n-1} - a_2x_2y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}a_{n-1}x_{n-1}y_1 + \\ + (-1)^{n-1}a_nx_ny_0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

де $y_0 = 1, y_{<0} = 0$,

$$\begin{aligned} x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1x_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n}y_2x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{a_1}{a_n}y_{n-1}x_1 + \\ + (-1)^{n-1}\frac{1}{a_n}y_nx_0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

де $x_0 = 1, x_{<0} = 0$.

Доведення. Для доведення рівностей (2.1) достатньо замінити у теоремі 1.8 при $m = n$ змінні $x_i, i = 1, 2, \ldots$ виразами $a_i x_i$. Далі слід зауважити, що многочлени розбиттів (2.2), внаслідок теореми 1.7, взаємно обернені до многочленів розбиттів (2.1). Винесемо із $j-$го стовпця $(j = 1, 2, \ldots)$ за знак парадетермінанта множник $\frac{a_{j-1}}{a_j}$, (тут ми вважаємо, що $a_0 = 1$) тоді отримаємо очевидні рівності

$$x_n = \frac{1}{a_1}\frac{a_1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \left\langle \frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}} \right\rangle_{1 \le j \le i \le n} =$$

$$= \frac{1}{a_n} \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{k!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots$$

Для доведення того факту, що многочлени розбиттів (2.1), (2.2) задовольняють відповідно рекурентні рівності (2.3), (2.4) достатньо розкласти парадетермінанти із рівностей (2.1), (2.2) за елементами останнього рядка. □

До класу многочленів розбиттів, які описано у теоремі 2.1 належать відомі взаємно обернені пари многочленів розбиттів, що пов'язують між собою повні однорідні симетричні многочлени з елементарними симетричними многочленами.

$$p_k = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + k\lambda_k = k} (-1)^{k - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_k!} \cdot \sigma_1^{\lambda_1} \sigma_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot \sigma_k^{\lambda_k},$$

$$\sigma_k = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + k\lambda_k = k} (-1)^{k - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_k!} \cdot p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\lambda_k}.$$

Ці многочлени можна отримати при допомозі лінійних рекурентних співвідношень вигляду

$$p_k = \sigma_1 p_{k-1} - \sigma_2 p_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} \sigma_k, \qquad (2.5)$$

$$\sigma_k = p_1\sigma_{k-1} - p_2\sigma_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}p_k.$$

Праві частини цих рівностей є розкладом відповідних парадетермінантів похилої структури за елементами останнього рядка:

$$p_k = \left\langle \begin{array}{cccccc} \sigma_1 & & & & & \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & \\ \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_{k-2}} & \frac{\sigma_{k-2}}{\sigma_{k-3}} & \ldots & \sigma_1 & & \\ \frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}} & \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_{k-2}} & \ldots & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 & \end{array} \right\rangle_k, \tag{2.6}$$

$$\sigma_k = \left\langle \begin{array}{cccccc} p_1 & & & & & \\ \frac{p_2}{p_1} & p_1 & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & \\ \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} & \frac{p_{k-2}}{p_{k-3}} & \ldots & p_1 & & \\ \frac{p_k}{p_{k-1}} & \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} & \ldots & \frac{p_2}{p_1} & p_1 & \end{array} \right\rangle_k. \tag{2.7}$$

Для параперманентів справедлива аналогічна теорема:

Теорема 2.2. *Справедливі рівності:*

$$y_n = \left[\begin{array}{cccccc} a_1x_1 & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & & & \\ \frac{a_3}{a_2}\frac{x_3}{x_2} & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & \end{array} \right]_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} k!\frac{a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

$$x_n = (-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{cccccc} \frac{1}{a_1}y_1 & & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_1}{a_2}y_1 & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_3}{y_2} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_2}{a_3}y_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1 & \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \frac{1}{a_n}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, n=1,2,\ldots \tag{2.9}$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$.

Взаємно обернені многочлени розбиттів (2.8), (2.9) задовольняють відповідно рекурентні рівності:

$$y_n = a_1x_1y_{n-1} + a_2x_2y_{n-2} + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}y_1 + a_nx_ny_0, \tag{2.10}$$

$y_0 = 1, y_{<0} = 0$

$$x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}y_1x_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n}y_2x_{n-2} - \ldots - \frac{a_1}{a_n}y_{n-1}x_1 + \frac{1}{a_n}y_nx_0, \tag{2.11}$$

$x_0 = 1, x_{<0} = 0$

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 2.1. □

Зауважимо, що пізніше, у 2014 році, Гоєм Т.П. та Заторським Р.А., у оглядовій статті [17] про узагальнені факторіальні степені, розглядалися многочлени розбиттів

$$\mathrm{ddet}(F) =$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}}\right)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}}\right)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$\operatorname{ddet}(F) =$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m} \frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}}\right)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$, і $a^{i\{r\}}=a(a+r)(a+2r)\cdot\ldots\cdot(a+(n-1)r)$ — факторіальний степінь з кроком r, пов'язані із парафункціями трикутної матриці похилої структури виду

$$F=\begin{pmatrix} \frac{a}{b}x_1 & & & & & \\ \frac{a+r}{b+s}\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ \frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a+(n-2)r}{b+(n-2)s}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{a}{b}x_1 & & \\ 0 & \frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{a+r}{b+s}\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots\ldots & \frac{a}{b}x_1 \end{pmatrix}_m .$$

Цей клас многочленів розбиттів перетинається із класом многочленів розбиттів розглянутим у теоремі 2.1. Однак ці автори, у своїй статті, не досліджують обернені многочлени розбиттів.

Якщо у парафункціях теорем 2.1, 2.2 покласти, наприклад, $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$ і $y_1=y_2=\ldots=y_n=1$ та обчислити їх, то отримаємо пару взаємно обернених многочленів розбиттів, які повязують між собою раціональні функції натурального аргументу.

Розглянемо приклади взаємно обернених многочленів розбиттів, які належать до досліджуваного у теоремі 2.1 класу многочленів розбиттів.

Приклад 2.1. *Розглянемо перший випадок, коли у теоремі 2.1* $a_i=i!$, *де* $i=1,2\ldots n$. *Тоді отримаємо відповідне рекурентне*

рівняння

$$y_n = 1!x_1y_{n-1} - 2!x_2y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}(n-1)!x_{n-1}y_1 + \\ + (-1)^{n-1}(n)!x_ny_0, \tag{2.12}$$

де $y_0 = 1, y_{<0} = 0$ *та рівність*

$$y_n = \left\langle \begin{array}{cccc} x_1 & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ 3\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n\frac{x_n}{x_{n-1}} & (n-1)\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & 2\frac{x_2}{x_1} \quad x_1 \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}k!\frac{1!^{\lambda_1}2!^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n!^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Відповідний обернений многочлен розбиттів задається рекурентним співвідношенням

$$x_n = \frac{1}{n^{\underline{1}}}y_1x_{n-1} - \frac{1}{n^{\underline{2}}}y_2x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{n^{\underline{n-1}}}y_{n-1}x_1 + \\ + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\underline{n}}}y_nx_0, \tag{2.14}$$

де $x_0 = 1, x_{<0} = 0$ *та рівністю*

$$x_n = \left\langle \begin{array}{cccc} y_1 & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{3}y_1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & \frac{1}{n-1}\frac{y_2}{y_1} \quad \frac{1}{n}y_1 \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \frac{1}{n!}\cdot\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\cdot\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots. \tag{2.15}$$

Зауважимо, що якщо у парадетермінанті рівності (2.13) покласти $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, *то отримаємо числову послідовність послідовність, яка у електронній енциклопедії числових послідовностей (On-Line Encyclopedia of integer Sequences) отримала номер A003319:*

$$\{\langle i-j+1\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\}_{n=1}^{\infty} = 1,-1,3,-13,71,-461,3447,-29093,$$

$$273343,-2829325,31998903,-392743957,5201061455,-73943424413,$$

$$1123596277863,-18176728317413,311951144828863,$$

$$-5661698774848621,108355864447215063,-2181096921557783605,\ldots$$

Приклад 2.2. *Якщо у теоремі 2.1 покласти* $a_i = \frac{1}{i!}, i = 1,2\ldots n$, *то отримаємо наступну пару взаємно обернених многочленів розбиттів:*

$$y_n = \frac{1}{1!}x_1y_{n-1} - \frac{1}{2!}x_2y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)!}x_{n-1}y_1 + \\ + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n)!}x_ny_0, \tag{2.16}$$

де $y_0 = 1, y_{<0} = 0$.

$$y_n = \left\langle \begin{array}{cccc} x_1 & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \frac{1}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{1}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} \quad x_1 \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\frac{k!}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i!\cdot(i!)^{\lambda_i}}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{2.17}$$

де $n = 1,2,\ldots$ *i* $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = n^{\underline{1}} y_1 x_{n-1} - n^{\underline{2}} y_2 x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} n^{\underline{n-1}} y_{n-1} x_1 + \\ + (-1)^{n-1} n^{\underline{n}} y_n x_0, \tag{2.18}$$

де $x_0 = 1, x_{<0} = 0,$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & 3y_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & (n-1)\frac{y_2}{y_1} & ny_1 \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= n! \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{k!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.19}$$

Парадетермінант у рівності (2.17) дорівнює $\frac{1}{n!}$ *(див. рівність 3.2.77 на стор. 278, [34]). Тому пара взаємно обернених многочленів розбиттів із цього прикладу дає таку комбінаторну тотожність:*

$$n! \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\prod_{i=1}^{n} i!^{\lambda_i} \lambda_i!} = 1.$$

Приклад 2.3. *При* $a_i = i, i = 1, 2 \ldots n$*, теорема 2.1 приводить до наступної пари взаємно обернених многочленів розбиттів:*

$$y_n = x_1 y_{n-1} - 2x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} (n-1) x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} n x_n y_0, \tag{2.20}$$

де $y_0 = 1, y_{<0} = 0,$

$$y_n = \left\langle \begin{array}{cccc} x_1 & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \frac{3}{2}\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n}{n-1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-1}{n-2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & 2\frac{x_2}{x_1} \quad x_1 \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} k! \frac{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.21}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$

$$x_n = \frac{n-1}{n} y_1 x_{n-1} - \frac{n-2}{n} y_2 x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{1}{n} y_{n-1} x_1 + \\ + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} y_n x_0, \tag{2.22}$$

де $x_0 = 1, x_{<0} = 0,$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{cccc} y_1 & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2} y_1 & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{2}{3} y_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & \frac{n-2}{n-1}\frac{y_2}{y_1} \quad \frac{n-1}{n} y_1 \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{k!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, , n = 1, 2, \ldots \tag{2.23}$$

У [34], на стор. 137 обчислено значення парадетерміна-

нта із рівності (2.21) при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$:

$$\left\langle \frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 3s, \\ 1, & \text{якщо } n = 3s+1, = \\ -1, & \text{якщо } n = 3s+2 \end{cases}$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} \cdot 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}; \tag{2.24}$$

Приклад 2.4. *Розглянемо випадок, коли* $a_i = \frac{1}{i}$, *де* $i = 1, 2 \ldots, n$. *При цьому отримаємо:*

$$y_n = x_1 y_{n-1} - \frac{1}{2} x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x_n y_0, \tag{2.25}$$

де $y_0 = 1, y_{<0} = 0$,

$$y_n = \left\langle \begin{array}{cccccc} x_1 & & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & \\ \frac{2}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ \frac{n-1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-2}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\prod_{i=1}^{n} i^{\lambda_i} \cdot \lambda_i!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.26}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = \frac{n}{n-1} y_1 x_{n-1} - \frac{n}{n-2} y_2 x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} n \cdot y_{n-1} x_1 + \\ + (-1)^{n-1} n \cdot y_n x_0, \tag{2.27}$$

де $x_0 = 1, x_{<0} = 0,$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{cccccc} y_1 & & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & \frac{2}{3}y_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & \frac{n-1}{n-2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n}{n-1}y_1 & \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, , n = 1, 2, \ldots \tag{2.28}$$

Якщо ж у рівності (2.26) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, *то отримаємо числову послідовність, пов'язану із послідовністю*

$$\left\{ n! \left\langle \frac{i-j+\delta_{ij}}{i-j+1} \right\rangle \right\}_{n=1}^{\infty} = 1, 1, 2, 4, 14, 38, 216, 600, 6240, 9552,$$

$$319296, -519312, 28108560, -176474352, 3998454144, -43985078784,$$

$$837126163584, -12437000028288, \ldots.$$

Її номер у електронній енциклопедії числових послідовностей — A006252. Генератрисою цієї числової послідовності є функція

$$f(x) = \frac{1}{1 - ln(1+x))}.$$

Якщо у теоремі 2.2 коефіцієнти a_i замінити відповідно на $i!, \frac{1}{i!}, i, \frac{1}{i}$, то отримаємо нові чотири пари взаємно обернених многочленів розбиттів:

1. $a_i = i!, i = 1, 2 \ldots n$

$$y_n = \left[\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ 3\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ n\frac{x_n}{x_{n-1}} & n-1\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right]_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} k!\frac{1!^{\lambda_1}2!^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n!^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, n=1,2,\ldots \tag{2.29}$$

$$x_n=(-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{cccccc} y_1 & & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{3}y_1 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & \frac{1}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{n}y_1 & \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \frac{1}{n!}\cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, n=1,2,\ldots \tag{2.30}$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$.

Взаємно обернені многочлени розбиттів (2.29), (2.30) задовольняють відповідно рекурентні рівності

$$y_n = x_1y_{n-1}+2!x_2y_{n-2}+\ldots+(n-1)!x_{n-1}y_1+n!x_ny_0, \tag{2.31}$$

$y_0=1, y_{<0}=0$

$$x_n = -\frac{1}{n^{\underline{1}}}y_1x_{n-1}-\frac{1}{n^{\underline{2}}}y_2x_{n-2}-\ldots-\frac{1}{n^{\underline{n-1}}}y_{n-1}x_1+\frac{1}{n^{\underline{n}}}y_nx_0, \tag{2.32}$$

$x_0=1, x_{<0}=0$

Якщо у рівності (2.8) покласти $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$, то отримаємо числову послідовність, яка у електронній енциклопедії числових послідовностей (On-Line Encyclopedia of integer Sequences) отримала номер A051296:

$$\{[i-j+1]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\}_{n=1}^{\infty} = 1,3,11,47,231,1303,8431,62391,524495,$$

$$4960775, 52223775, 605595319, 7664578639, 105046841127,$$

$$1548880173119, 24434511267863, 410503693136559, 7315133279097607,$$

137787834979031839, 27349982012083514 79, 570536445621044307 35,

2. $a_i = \frac{1}{i!}, i = 1, 2 \ldots n$

$$y_n = \begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{1}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{k!}{1!^{\lambda_1} \cdot \lambda_1! \cdot 2!^{\lambda_2} \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot n!^{\lambda_n} \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{2.33}$$

де $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n = (-1)^{n-1} \left\langle \begin{array}{cccc} y_1 & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & 3y_1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & (n-1)\frac{y_2}{y_1} \quad ny_1 \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= n! \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k-1} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.34}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$. Відповідні рекурентні співвідношення мають вигляд:

$$y_n = x_1 y_{n-1} + \frac{1}{2!} x_2 y_{n-2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} x_{n-1} y_1 + \frac{1}{n!} x_n y_0, \tag{2.35}$$

$y_0 = 1, y_{<0} = 0$

$$x_n = -n^{\underline{1}} y_1 x_{n-1} - n^{\underline{2}} y_2 x_{n-2} - \ldots - n^{\underline{n-1}} y_{n-1} x_1 + n^{\underline{n}} y_n x_0, \tag{2.36}$$

$x_0 = 1, x_{<0} = 0$

При допомозі рівності (2.33), роблячи відповідні підстановки, приходимо до числової послідовності A000670:

$$\left\{n!\left[\frac{1}{i-j+1}\right]\right\}_{n=1}^{\infty} = 1, 3, 13, 75, 541, 4683, 47293, 545835, 7087261,$$

$$102247563, 1622632573, 28091567595, 526858348381, 10641342970443,$$

$$230283190977853, 5315654681981355, 130370767029135901,$$

$$3385534663256845323, \ldots$$

3. $a_i = \frac{1}{i}, i = 1, 2 \ldots n$

$$y_n = \begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{2}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{n-1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-2}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{k!}{1^{\lambda_1}\cdot\lambda_1!\cdot 2^{\lambda_2}\cdot\lambda_2!\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}\cdot\lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{2.37}$$

де $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n = (-1)^{n-1}\left\langle \begin{matrix} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & \frac{3}{2}y_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & \frac{n-1}{n-2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n}{n-1}y_1 \end{matrix} \right\rangle_n =$$

$$= n\cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots \tag{2.38}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Рекурентні співвідношення для взаємно обернених многочленів розбиттів (2.37), (2.38) мають вигляд:

$$y_n = x_1 y_{n-1} + \frac{1}{2} x_2 y_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n-1} x_{n-1} y_1 + \frac{1}{n} x_n y_0, \qquad (2.39)$$

$y_0 = 1, y_{<0} = 0$

$$x_n = -\frac{n}{n-1} y_1 x_{n-1} - \frac{n}{n-2} y_2 x_{n-2} - \ldots - n y_{n-1} x_1 + n y_n x_0, \quad (2.40)$$

$x_0 = 1, x_{<0} = 0$

Якщо у рівності (2.37) замість $x_1, x_2, \ldots, x_n$ підставити одиниці, то отримаємо числову послідовність, яка пов'язана із числовою послідовністю

$$\left\{ n! \left[\frac{i-j+\delta_{ij}}{i-j+1} \right] \right\}_{n=1}^{\infty} = 1, 3, 14, 88, 694, 6578, 72792, 920904,$$

$$13109088, 207360912, 3608233056, 68495486640, 1408631978064,$$

$$31197601660080, 740303842925184, 18738231641600256,$$

$$503937595069600896, 14349899305396062720, \ldots.$$

Утворена послідовність у електронній енциклопедії числових послідовностей (On-Line Encyclopedia of integer Sequences) отримала номер A007840 (див. також [47], [59]).

4. $a_i = i, i = 1, 2 \ldots n$

$$y_n = \begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{3}{2}\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{n}{n-1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-1}{n-2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} k!\frac{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, n=1,2,\ldots \tag{2.41}$$

$$x_n=(-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{2}{3}y_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & \frac{n-2}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n-1}{n}y_1 \end{array} \right\rangle_n =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, n=1,2,\ldots \tag{2.42}$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. При цьому взаємно обернені многочлени розбиттів (2.41), (2.42) задовольняють відповідно рекурентні рівності

$$y_n=x_1y_{n-1}+2x_2y_{n-2}+\ldots+(n-1)x_{n-1}y_1+nx_ny_0, \tag{2.43}$$

$y_0=1, y_{<0}=0$

$$x_n=-\frac{n-1}{n}y_1x_{n-1}-\frac{n-2}{n}y_2x_{n-2}-\ldots-\frac{1}{n}y_{n-1}x_1+\frac{1}{n}y_nx_0, \tag{2.44}$$

$x_0=1, x_{<0}=0$

Позаяк значення параперманента із рівності (2.41) при $x_1=\ldots=x_n=1$ дорівнює F_{2n}, де F_i – числа Фібоначчі, то, використовуючи взаємно обернені многочлени розбиттів із цього пункту, можна отримати нову цікаву тотожність із числами Фібоначчі:

$$\frac{1}{n}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}F_2^{\lambda_1}F_4^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot F_{2n}^{\lambda_n}=1.$$

2.2. Парафункції трикутних матриць похилої структури з першим довільним стовпцем

В цьому розділі ми дослідимо властивості широкого класу многочленів розбиттів, що генеруються парафункціями трикутних матриць похилої структури з першим довільним стовпцем. Тут, зокрема, будуть встановлені зв'язки між цим класом розбиттів, відповідними парафункціями трикутних матриць та відповідними рекурентними співвідношеннями.

Справедливі наступні дві теореми:

Теорема 2.3. *Нехай многочлени* $y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), n = 0, 1, \ldots$ *задаються рекурентним співвідношенням*

$$y_n = x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} a_n x_n y_0, \tag{2.45}$$

де $y_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$y_n = \operatorname{ddet} \begin{pmatrix} a_1 x_1 & & & \\ a_2 \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_n \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right) \frac{(k-1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{2.47}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Доведення. Те, що парадетермінант (2.46) задовольняє рекурентне співвідношення (2.49) випливає із його розвинення за елементами останнього рядка.

Доведемо справедливість рівності (2.51).

Нехай теорема справедлива при $n = 0, 1, \ldots, m$. Доведемо її справедливість при $n = m + 1$. Знайдемо коефіцієнт при деякому фіксованому одночлені

$$x_1^{\lambda_1^*}, x_2^{\lambda_2^*}, \ldots, x_m^{\lambda_m^*}, x_{m+1}^{\lambda_{m+1}^*} \tag{2.48}$$

в поліномі y_{m+1}.

Можливі два випадки:

1) $\lambda_{m+1}^* = 0$. В цьому випадку, згідно з рекурентним співвідношенням

$$y_{m+1} = x_1 y_m - x_2 y_{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1} x_m y_1 + (-1)^m a_{m+1} x_{m+1} y_0,$$

шуканий коефіцієнт одночлена (2.48) можна отримати при допомозі суми коефіцієнтів, що відповідають доданкам

$$a(i) = (-1)^{i-1} x_i y_{m-i+1}, i = 1, 2, \ldots, m$$

цього співвідношення. Очевидно, що доданкам $a(i)$ відповідають розбиття

$$\lambda_1^* + 2\lambda_2^* + \ldots + i(\lambda_i^* - 1) + (i+1)\lambda_{i+1}^* + \ldots + (m-i+1)\lambda_{m-i+1}^* = m-i+1$$

а їм коефіцієнти –

$$(-1)^{i-1}(-1)^{m-i+1-k-1} \left(\lambda_1^* a_1 + \ldots + (\lambda_i^* - 1)a_i + \ldots + \lambda_m^* a_m\right) \times$$
$$\times \frac{(k-2)!}{\lambda_1^*! \cdot \ldots \cdot (\lambda_i^* - 1)! \cdot \ldots \cdot \lambda_m^*!},$$

де $k = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \ldots + \lambda_m^*$. Ці коефіцієнти, враховуючи те, що $\lambda_{m-i+2}^* = \ldots = \lambda_{m+1}^* = 0$, можна записати у вигляді

$$(-1)^{m-A+1} \left(B - a_i\right)) \frac{(A-2)!}{\lambda_1^*! \cdot \ldots \cdot (\lambda_i^* - 1)! \cdot \ldots \cdot \lambda_m^*! \lambda_{m+1}^*!},$$

де

$$A = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^*, B = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^* a_i.$$

Таким чином, шуканий коефіцієнт при одночлені

$$x_1^{\lambda_1^*} x_2^{\lambda_2^*} \cdot \ldots \cdot x_m^{\lambda_m^*} x_{m+1}^{\lambda_{m+1}^*}$$

дорівнює

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{m+1-A} (B - a_i) \lambda_i \frac{(A-2)!}{\lambda_1^*! \cdot \ldots \cdot \lambda_{m+1}^*!} =$$

$$= (-1)^{m+1-A} B \frac{(A-1)!}{\lambda_1^*! \cdot \ldots \cdot \lambda_{m+1}^*!}$$

2) $\lambda_{m+1}^* = 1$. Очевидно, що в цьому випадку

$$\lambda_1^* = \lambda_2^* = \ldots = \lambda_m^* = 0,$$

причому із рекурентного співвідношення випливає, що шуканий коефіцієнт дорівнює

$$(-1)^m a_{m+1}.$$

Але і цей коефіцієнт можна подати у вигляді

$$(-1)^{m+1-A} B \frac{(A-1)!}{\lambda_1^*! \cdot \ldots \cdot \lambda_{m+1}^*!},$$

бо $A = 1, B = a_{m+1}$. □

Якщо у теоремі 2.3 покласти $a_i = 1, i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = k$$

і ми отримаємо теорему 1.8 при $n = m$.

Якщо ж у теоремі 2.3 покласти $a_i = i, i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n$$

і тоді справедливий наступний

Наслідок 2.1. *Нехай многочлени* $y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), n = 0, 1, \ldots$ *задаються рекурентним співвідношенням*

$$y_n = x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} n x_n y_0, \quad (2.49)$$

де $y_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$y_n = \operatorname{ddet} \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ n\frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

$$y_n = n \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \frac{(k-1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad (2.51)$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Цей наслідок описує многочлени розбиттів, які з'являються у теорії симетричних многочленів. А саме многочлени розбиттів, в яких степеневі суми виражаються через повні однорідні симетричні многочлени та елементарні симетричні многочлени. Вони наведені вкінці першого розділу дисертації.

Аналогічно можна довести справедливість і наступної теореми

Теорема 2.4. *Нехай многочлени* $y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), n = 0, 1, \ldots$ *задані рекурентним співвідношенням*

$$y_n = x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \ldots + x_{n-1} y_1 + a_n x_n y_0,$$

де $y_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$y_n = \operatorname{pper} \begin{pmatrix} a_1 x_1 & & & \\ a_2 \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_n \frac{x_n}{x_{n-1}} & \dots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix},$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right) \frac{(k-1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Для теореми 2.4, як і для теореми 2.3, справедливий наступний

Наслідок 2.2. *Нехай многочлени* $y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), n = 0, 1, \ldots$ *задані рекурентним співвідношенням*

$$y_n = x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \ldots + x_{n-1} y_1 + n x_n y_0,$$

де $y_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$y_n = \operatorname{pper} \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ n\frac{x_n}{x_{n-1}} & \dots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix},$$

$$y_n = n \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \frac{(k-1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Цікавим виявляється також випадок, коли $a_i = ri + s$, де r і s – деякі раціональні числа такі, що $rs \neq 0$. В цьому випадку справедливий

Наслідок 2.3. *Наступні рівності задають одні і ті ж многочлени:*

$$y_n = x_1y_{n-1} - x_2y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}x_{n-1}y_1 + (-1)^{n-1}(rn+s)x_ny_0,$$

$$y_n = \operatorname{ddet}\begin{pmatrix} (r+s)x_1 & & & \\ (2r+s)\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ (rn+s)\frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix},$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\,(rn+sk)\,\frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,\ y_0 = 1.$

Позаяк $a_i = ri + s$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}(ri+s) = r\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i + s\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = nr + sk,$$

то доведення цього наслідку очевидне.

Аналогічний наслідок справедливий і для теореми 2.4:

Наслідок 2.4. *Наступні рівності задають однакові многочлени:*

$$y_n = x_1y_{n-1} + x_2y_{n-2} + \ldots + x_{n-1}y_1 + (rn+s)x_ny_0,$$

$$y_n = \operatorname{pper}\begin{pmatrix} (r+s)x_1 & & & \\ (2r+s)\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ (rn+s)\frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix},$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (rn+sk)\,\frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,\ y_0 = 1.$

2.3. Обернені многочлени розбиттів

У цьому параграфі побудуємо многочлени розбиттів обернені до многочленів розбиттів із теорем 2.3 та 2.4.

Теорема 2.5. *Нехай многочлени* $x_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), n = 0, 1, \ldots$ *задані рекурентним співвідношенням*

$$x_n = a_n y_1 x_{n-1} - a_n y_2 x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} a_n y_{n-1} x_1 + (-1)^{n-1} a_n y_n x_0,$$

де $x_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$x_n = \operatorname{ddet} \begin{pmatrix} a_1 y_1 & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & a_2 y_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & a_n y_1 \end{pmatrix}, \tag{2.52}$$

$$x_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=n} a_{\alpha_1} a_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r} y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot y_{\alpha_r}, \tag{2.53}$$

де $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \ldots, r$.

Доведення. Елементи матриці парадетермінанта правої частини рівності (2.52) можна записати у вигляді

$$a_{ij} = \frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}} a_i^{\delta_{ij}},$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. Отже, згідно з означенням факторіального добутку , маємо

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} \frac{y_{i-k+1}}{y_{i-k}} a_i^{\delta_{ik}} = y_{i-j+1} a_i.$$

Дальше використаємо означення парадетермінанта (1.2) трикутної матриці

$$\mathrm{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n} (-1)^{n-r} a_{\alpha_1} a_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r} y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot y_{\alpha_r}.$$

□

Нехай Λ_k – мультимножина додатніх компонент невпорядкованого розбиття

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n$$

натурального числа n на цілі невід'ємні числа, причому виконується рівність $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = k$, а $P(\Lambda_k)$ – множина всіх перестановок елементів мультимножини Λ_k, тоді $|\Lambda_k| = k$ та, згідно з теоремою про число перестановок елементів мультимножини виконується рівність

$$|P(\Lambda_k)| = \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}.$$

У цьому випадку рівність (2.53) можна записати у вигляді

$$x_n = \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} (-1)^{n-k} A_{\Lambda_k} \cdot y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, \qquad (2.54)$$

де

$$A_{\Lambda_k} = \left(\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)\in P(\Lambda_k)} a_{\alpha_1} a_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{k-1}} a_n \right).$$

Приклад 2.5. *Знайдемо у многочлені розбиття (2.54), при* $n = 20$, *коефіцієнт біля* $y_4^2 y_5 y_7$. *Тут*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 1, \lambda_6 = 0, \lambda_7 = 1, \lambda_8 = \lambda_9 = \ldots =$$
$$= \lambda_{20} = 0, k = 4, \Lambda_4 = \{4, 4, 5, 7\},$$
$$P(\Lambda_4) = \{(4,4,5,7), (4,4,7,5), (4,5,4,7), (4,5,7,4), (4,7,4,5),$$
$$(4,7,5,4), (5,4,4,7), (5,4,7,4), (5,7,4,4), (7,4,4,5), (7,4,5,4),$$
$$(7,5,4,5)\}$$

$$A_{\Lambda_4} = a_4a_8a_{13}a_{20}+a_4a_8a_{15}a_{20}+a_4a_9a_{13}a_{20}+a_4a_9a_{16}a_{20}+a_4a_{11}a_{15}a_{20}+$$
$$+a_4a_{11}a_{16}a_{20}+a_5a_9a_{13}a_{20}+a_5a_9a_{16}a_{20}+a_5a_{12}a_{16}a_{20}+a_7a_{11}a_{15}a_{20}+$$
$$+a_7a_{11}a_{16}a_{20}+a_7a_{12}a_{16}a_{20}.$$

Якщо у рівності (2.54) покласти $a_i = 1, i = 1, 2, \ldots, n$, то отримаємо многочлен розбиття (1.8).

Якщо ж у цій рівності покласти $a_i = -1, i = 1, 2, \ldots, n$, то, очевидно, що

$$A_n = (-1)^k \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}$$

і

$$x_n = \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} (-1)^{n-k}(-1)^k \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n} =$$
$$= (-1)^n \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n} =$$
$$(-1)^n \begin{bmatrix} y_1 & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & y_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & y_1 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно до теореми 2.5 доводиться і наступна теорема для параперманентів трикутних матриць.

Теорема 2.6. *Нехай многочлени* $x_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), n = 0, 1, \ldots$ *задані рекурентним співвідношенням*

$$x_n = a_n y_1 x_{n-1} + a_n y_2 x_{n-2} + \ldots + a_n y_{n-1} x_1 + a_n y_n x_0,$$

де $x_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$x_n = \operatorname{pper} \begin{pmatrix} a_1 y_1 & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & a_2 y_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & a_n y_1 \end{pmatrix},$$

$$x_n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=n} a_{\alpha_1} a_{\alpha_1+\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r} y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot y_{\alpha_r},$$

де $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \ldots, r$.

Наслідок 2.5. *Якщо* $a_i = ai + b$, *де* a *і* b – *деякі раціональні числа такі, що* $ab \neq 0$ *и* $a \neq b$, *причому справедливі рівності*

$$x_n = (an + b) y_1 x_{n-1} - (an + b) y_2 x_{n-2} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-2} (an + b) y_{n-1} x_1 + (-1)^{n-1} (an + b) y_n x_0,$$

де $x_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$x_n = \operatorname{ddet} \begin{pmatrix} (a+b) y_1 & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & (2a+b) y_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & (an+b) y_1 \end{pmatrix},$$

$$x_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=n} \prod_{i=1}^{r} (a(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_i)+b) y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot y_{\alpha_r},$$

де $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \ldots, r$.

2.4. Многочлени розбиттів, що генеруються парафункціями трикутних матриць з двома першими довільними стовпцями

Розглянемо теорему

Теорема 2.7. *Якщо многочлени задані рекурентним рівнянням*

$$y_n = x_1 y_{n-1} - x_2 y_{n-2} + x_3 y_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-3} x_{n-2} y_2 + \\ + (-1)^{n-2} \tau_{n2} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} \tau_{n1} \tau_{n2} x_n y_0, \qquad (2.55)$$

де $y_0 = 1$, *тоді справедливі рівності*

$$y_n = \left\langle \begin{array}{ccccccc} \tau_{11}x_1 & & & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & & & & \\ \tau_{31}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \cdots & x_1 & & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \cdots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 & \end{array} \right\rangle_n \qquad (2.56)$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \frac{A(\lambda, \tau)}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \qquad (2.57)$$

де

$$A(\lambda, \tau) = \left(\lambda_1(\lambda_1 - 1)\tau_{11}\tau_{22} + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_1 \lambda_i \tau_{11} \tau_{i+1,2} \right) \cdot (k-2)! + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i+1} \tau_{i+1,1} \tau_{i+1,2} \cdot (k-1)!$$

Доведення.

$$y_n = \left\langle \begin{matrix} \tau_{11}x_1 & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & & \\ \tau_{31}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \cdots & x_1 \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \cdots & \frac{x_2}{x_1} \quad x_1 \end{matrix} \right\rangle_n =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{21}\frac{x_2}{x_1}\right)\tau_{22}x_1 & & & \\ \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{31}\frac{x_3}{x_2}\right)\tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right)\tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{n-4} & \cdots & x_1 \\ \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{n-3} & \cdots & \frac{x_2}{x_1} \quad x_1 \end{matrix} \right\rangle_{n-1} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+(n-1)\lambda_{n-1}=n-1} (-1)^{n-1-k} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(\tau_{11}x_1 - \tau_{i+1,1}\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)\tau_{i+1,2} \times$$

$$\times \frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_{n-1}!} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+(n-1)\lambda_{n-1}=n-1} (-1)^{n-1-k}\tau_{11} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \tau_{i+1,2} \times$$

$$\times \frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_{n-1}!} x_1^{\lambda_1+1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} +$$

$$+ \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+(n-1)\lambda_{n-1}=n-1} (-1)^{n-k} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2} \times$$

$$\times \frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_{n-1}!} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_i^{\lambda_i-1}x_{i+1}^{\lambda_{i+1}+1}\cdot x_{i+2}^{\lambda_{i+2}}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{\lambda_{n-1}},$$

де $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} = k$.

Перша сума після заміни

$$\lambda_1 + 1 = \lambda_1^{'}, \lambda_2 = \lambda_2^{'}, \ldots, \lambda_n = \lambda_n^{'} = 0$$

матиме вигляд

$$\sum_{\lambda_1^{'}+2\lambda_2^{'}+\ldots+n\lambda_n^{'}=n} (-1)^{n-k^{'}} \left((\lambda_1^{'} - 1)\tau_{11}\tau_{22} + \tau_{11} \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i^{'} \tau_{i+1,2} \right) \times$$

$$\times \frac{(k^{'}-2)!}{(\lambda_1^{'}-1)!\lambda_2^{'}! \ldots \lambda_n^{'}!} x_1^{\lambda_1^{'}} x_2^{\lambda_2^{'}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n^{'}},$$

а друга — після заміни

$$\lambda_1 = \lambda_1^{'}, \ldots, \lambda_{i-1} = \lambda_{i-1}^{'}, \lambda_i - 1 = \lambda_i^{'}, \lambda_{i+1} + 1 = \lambda_{i+1}^{'},$$

$$\lambda_{i+2} = \lambda_{i+2}^{'}, \ldots, \lambda_n = \lambda_n^{'} = 0$$

— вигляд

$$\sum_{\lambda_1^{'}+2\lambda_2^{'}+\ldots+n\lambda_n^{'}=n} (-1)^{n-k^{'}} \sum_{i=1}^{n-1} \tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2} \times$$

$$\times \frac{(k^{'}-1)!}{\lambda_1^{'}! \cdot \ldots \cdot \lambda_i^{'}!(\lambda_{i+1}^{'}-1)!\lambda_{i+2}^{'}! \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{'}!} x_1^{\lambda_1^{'}} \cdot \ldots \cdot x_i^{\lambda_i^{'}} x_{i+1}^{\lambda_{i+1}^{'}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n^{'}}.$$

Накінець відзначимо, що розкладання парадетермінанта (2.56) за елементами останнього рядка приводить до рекурентного співвідношення (2.55). □

Покажемо, що теорема 2.7 є узагальненням теореми 2.3. З цією метою доведемо, що при $\tau_{22} = \tau_{32} = \ldots = \tau_{n2} = 1$ виконується рівність

$$A(\lambda, \tau) = (k-1)! \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau_{i1}.$$

Розглянемо два випадки:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = 1$. Маємо:

$$A(\lambda,\tau) = \left(\lambda_1(\lambda_1-1)\tau_{11}\tau_{22} + \sum_{i=2}^{n-1}\lambda_1\lambda_i\tau_{11}\tau_{i+1,2}\right)\cdot(k-2)!+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2}\cdot(k-1)! = \left(\lambda_1(\lambda_1-1)\tau_{11} + \sum_{i=2}^{n-1}\lambda_1\lambda_i\tau_{11}\right)\times$$

$$\times(k-2)!+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\cdot(k-1)! = (k-1)!\lambda_n\tau_{n1} = (k-1)!\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\tau_{i1}$$

2. $\lambda_n = 0$. У цьому випадку маємо:

$$A(\lambda,\tau) = \left(\lambda_1(\lambda_1-1)\tau_{11}\tau_{22} + \sum_{i=2}^{n-1}\lambda_1\lambda_i\tau_{11}\tau_{i+1,2}\right)\cdot(k-2)!+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2}\cdot(k-1)! = \left(\lambda_1(\lambda_1-1)\tau_{11} + \sum_{i=2}^{n-1}\lambda_1\lambda_i\tau_{11}\right)\times$$

$$\times(k-2)!+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\cdot(k-1)! = (k-2)!\lambda_1\tau_{11}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})+$$

$$+(k-1)!\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\tau_{i1} = (k-1)!\left(\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\tau_{i1}\right) = (k-1)!\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\tau_{i1}.$$

Приклад 2.6. *Знайдемо коефіцієнт $A(\lambda,\tau)$ у випадку, коли*

$$\tau_{i+1,1} = \frac{i+1}{i}, i = 1,2,\ldots,n-1,\ \tau_{1,1} = 1; \tau_{i+1,2} = i,$$

$i = 1,2,\ldots,n-1$. *Маємо*

$$A(\lambda,\tau) = \left(\lambda_1(\lambda_1-1)\tau_{11}\tau_{22} + \sum_{i=2}^{n-1}\lambda_1\lambda_i\tau_{11}\tau_{i+1,2}\right)\cdot(k-2)!+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2}\cdot(k-1)!=$$

$$=\left(\lambda_1(\lambda_1-1)+\sum_{i=2}^{n-1}i\lambda_1\lambda_i\right)(k-2)!+\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)\lambda_{i+1}(k-1)!=$$

$$=\lambda_1(n-n\lambda_n-1)(k-2)!+(n-\lambda_1)(k-1)!.$$

Тому

$$y_n=$$

$$=\left\langle\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & & & & & \\
\frac{2}{1}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & & \\
\frac{3}{2}\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & \\
\frac{4}{3}\frac{x_4}{x_3} & 3\frac{x_3}{x_2} & \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\
\frac{n-1}{n-2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & (n-2)\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \frac{x_{n-4}}{x_{n-5}} & \cdots & x_1 & \\
\frac{n}{n-1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & (n-1)\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \cdots & \frac{x_2}{x_1} & x_1
\end{array}\right\rangle_n=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}\frac{\lambda_1(n-n\lambda_n-1)(k-2)!+(n-\lambda_1)(k-1)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot$$

$$\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}$$

Цей многочлен розбиттів задовольняє рекурентне співвідношення

$$y_n=x_1y_{n-1}-x_2y_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-2}(n-1)x_{n-1}y_1+(-1)^{n-1}nx_ny_0,$$

де $y_0=1, y_1=x_1, y_{<0}=0.$

Таким чином, ми отримали новий многочлен розбиттів, який досі не зустрічався в математичній літературі.

Для парaперманентів можна сформулювати та довести аналогічну теорему. При цьому у доведенні всі міркування аналогічні до доведення теореми 2.7 з тією лише різницею, що всі доданки із знаком мінус потрібно замінити на такі ж доданки із знаком плюс.

Теорема 2.8. *Нехай многочлени задані рекурентним рівнянням*

$$y_n = x_1y_{n-1}+x_2y_{n-2}+x_3y_{n-3}+\ldots+x_{n-2}y_2+\tau_{n2}x_{n-1}y_1+\tau_{n1}\tau_{n2}x_ny_0, \tag{2.58}$$

де $y_0 = 1$, *а* τ_{ij} — *деякі параметри, тоді справедливі рівності*

$$y_n = \begin{bmatrix} \tau_{11}x_1 & & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & & & \\ \tau_{31}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \cdots & x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \cdots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n \tag{2.59}$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} A(\lambda,\tau)x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{2.60}$$

де

$$A(\lambda,\tau) = \left(\lambda_1(\lambda_1-1)\tau_{11}\tau_{22} + \sum_{i=2}^{n-1}\lambda_1\lambda_i\tau_{11}\tau_{i+1,2}\right)\frac{(k-2)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} + \\ + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2}\cdot\frac{(k-1)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}$$

Приклад 2.7. *Знайдемо, наприклад, коефіцієнт*

$$A(\lambda,\tau)$$

у многочлені розбиттів (2.57) у випадку якщо

$$n = 15, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_5 = 2.$$

У цьому випадку

$$k = 6$$

$$A(\lambda, \tau) = 4! \left(3 \cdot 2\tau_{11}\tau_{22} + \sum_{i=2}^{14} 3\lambda_i \tau_{11}\tau_{i+1,2} \right) + 5! \left(\sum_{i=1}^{14} \lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2} \right)$$

Отже, кінцево коефіцієнт біля

$$x_1^3 x_2 x_5^2$$

дорівнює

$$(-1)^{15-6} \frac{A(\lambda, \tau)}{3!1!2!} = -\frac{3 \cdot 2 \cdot 4!}{3! \cdot 1! \cdot 2!}\tau_{11}\tau_{22} - \frac{3 \cdot 4!}{3! \cdot 1! \cdot 2!}\tau_{11}\tau_{32} -$$
$$-\frac{3 \cdot 2 \cdot 4!}{3! \cdot 1! \cdot 2!}\tau_{11}\tau_{62} - \frac{1 \cdot 5!}{3! \cdot 1! \cdot 2!}\tau_{21}\tau_{22} - \frac{2 \cdot 5!}{3! \cdot 1! \cdot 2!}\tau_{51}\tau_{52} =$$
$$= -12\tau_{11}\tau_{22} - 6\tau_{11}\tau_{32} - 12\tau_{11}\tau_{62} - 10\tau_{21}\tau_{22} - 20\tau_{51}\tau_{52}.$$

Зауваження 2.1. *Очевидно, що теорема 2.7 узагальнює теорему 2.3. Дійсно, якщо* $\tau_{22} = \tau_{32} = \ldots = \tau_{n2} = 1$, *то*

$$A(\lambda, \tau) = \left(\lambda_1(\lambda_1 - 1)\tau_{11}\tau_{22} + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_1\lambda_i\tau_{11}\tau_{i+1,2} \right) \cdot (k-2)! +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2} \cdot (k-1)! =$$
$$= \left(\lambda_1(\lambda_1 - 1) + \lambda_1(k - \lambda_1)\right)\tau_{11} \cdot (k-2)! + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i\tau_{i1} \cdot (k-1)! =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\tau_{i1} \cdot (k-1)!.$$

2.5. Загальна теорема про многочлени розбиттів

В цьому підрозділі доведена загальна теорема многочленів розбиттів, що задається парафункціями трикутних матриць похилої структури.

Означення 2.1. *Факторіальним m-добутком $\{a_{ij}\}_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$ елемента a_{ij} деякої трикутної матриці, назвемо добуток*

$$\{a_{ij}\}_m = \prod_{k=j}^{min(i,m)} a_{ik},$$

а набір таких m-добутків — нормальним m-набором трикутної матриці, якщо об'єднання усіх їх співмножників утворює множину потужності m. Множину всіх нормальних m-наборів трикутної матриці позначимо через A_m.

Теорема 2.9. *Рівності*

$$y_n = \left\langle \begin{array}{ccccccc}
\tau_{11}x_1 & & & & & & \\
\tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} & & & & & \\
\vdots & \cdots & \ddots & & & & \\
\tau_{m1}\frac{x_m}{x_{m-1}} & \tau_{m2}\frac{x_{m-1}}{x_{m-2}} & \cdots & \tau_{mm}x_1 & & & \\
\tau_{m+1,1}\frac{x_{m+1}}{x_m} & \tau_{m+1,2}\frac{x_m}{x_{m-1}} & \cdots & \tau_{m+1,m}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\
\tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \cdots & \tau_{n-1,m}\frac{x_{n-m}}{x_{n-m-1}} & \frac{x_{n-m-1}}{x_{n-m-2}} & \cdots & x_1 \\
\tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{nm}\frac{x_{n-m+1}}{x_{n-m}} & \frac{x_{n-m}}{x_{n-m-1}} & \cdots & \frac{x_2}{x_1}\ x_1
\end{array} \right\rangle \tag{2.61}$$

$$y_n = x_1y_{n-1} - x_2y_{n-2} + x_3y_{n-3} - \ldots +$$

$$(-1)^{n-m-1}x_{n-m}y_m + (-1)^{n-m}\{\tau_{nm}\}_m x_{n-m+1}\times$$
$$\times y_{m-1} + (-1)^{n-m+1}\{\tau_{n,m-1}\}_m x_{n-m+2}y_{m-2}+$$
$$+\ldots+(-1)^{n-1}\{\tau_{n1}\}_m x_n y_0 \qquad (2.62)$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\sum_{i=m}^{n} A(\lambda,\tau,i)\times$$
$$\times\frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}, \qquad (2.63)$$

де $\tau_{ij}=1$ *при* $m+1\le j\le n$,

$$A(\lambda,\tau,i) =$$
$$\sum_{r=1}^{m}(k-r)!\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=m,\\ \alpha_j\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},j=1,\ldots,r}}\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_{r-1}}\lambda_{i-m+\alpha_r}\times$$
$$\times\{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m\prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m, \qquad (2.64)$$

причому

$$\underbrace{\lambda_{\alpha_j}\lambda_{\alpha_j}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_j}}_{k} = \lambda_{\alpha_j}^{\underline{k}} =$$
$$=\lambda_{\alpha_j}(\lambda_{\alpha_j}-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda_{\alpha_j}-k+1),\ j=1,\ldots,r$$

рівносильні між собою.

Доведення. Перш за все відзначимо, що рекурентна рівність (2.62) безпосередньо випливає із рівності (2.61) в результаті розкладу парадетермінанта за елементами останнього рядка.

Доведемо справедливість рівності (2.63). Многочлен розбиття, відповідний парадетермінанту трикутної матриці

$$\left\langle \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},$$

згідно з теоремою 4 із [5], має вигляд

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}\times$$

$$\times\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

□

Якщо ж $m=n$, то справедливий наслідок.

Знайдемо коефіцієнт при нормальному m-наборі трикутної матриці правої частини рівності (2.61). Елемент τ_{ij} факторіального m-добутку $\{\tau_{ij}\}_m$ лежить на $i-j+1$ - ій піддіагоналі трикутної матриці, тому разом з цим добутком до многочлена входитиме змінна x_{i-j+1}. Отже, доданок

$$k!\frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_{i-j+1}^{\lambda_{i-j+1}}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_{i-j+1}!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!},$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k$$

отримає вигляд

$$\ldots\lambda_{i-j+1}\{\tau_{ij}\}_m\ldots\cdot k!\cdot\frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_{i-j+1}^{\lambda_{i-j+1}}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_{i-j+1}!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}.$$

Зробимо заміну $\lambda_1=\lambda_1^{'},\ldots,\lambda_{i-j+1}+1==\lambda_{i-j+1}^{'},\ldots,\lambda_n=\lambda_n^{'}$, тоді останній доданок матиме вигляд

$$\ldots\lambda_{i-j+1}^{'}\{\tau_{ij}\}_m\ldots\cdot(k^{'}-1)!\times$$

$$\times\frac{x_1^{\lambda_1^{'}}\cdot\ldots\cdot x_{i-j+1}^{\lambda_{i-j+1}^{'}}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n{}^{'}}}{\lambda_1^{'}!\cdot\ldots\cdot\lambda_{i-j+1}^{'}!\cdot\ldots\cdot\lambda_n^{'}},$$

де $k^{'}=k+1$.

Якщо ж до нормального m-набору входить ще один факторіальний m-добуток $\{\tau_{i_1,j_1}\}$, елемент τ_{i_1,j_1} якого лежить на $(i-j+1)$-ій піддіагоналі, тобто виконується рівність $i-j+1 = i_1-j_1+1$, то останній одночлен многочлена, очевидно, прийме вигляд

$$\ldots \lambda''_{i-j+1}(\lambda''_{i-j+1}-1)\{\tau_{ij}\}_m\{\tau_{i_1,j_1}\}_m \ldots (k''-2)!\times$$

$$\times\frac{x_1^{\lambda''_1}\cdot\ldots\cdot x_{i-j+1}^{\lambda''_{i-j+1}}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}{}''}{\lambda''_1!\cdot\ldots\cdot\lambda''_{i-j+1}!\cdot\ldots\cdot\lambda''_n}.$$

Таким чином, побудувавши при допомозі впорядкованого розбиття

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r = m$$

нормальний m-набір трикутної матриці

$$\{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m\prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m,$$

коефіцієнт біля одночлена $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}$ матиме вигляд

$$\sum_{i=m}^{n}A(\lambda,\tau,i),$$

де $A(\lambda,\tau,i)$ задається рівністю (2.64).

Для параперманентів справедлива аналогічна теорема.

Теорема 2.10. *Рівності*

$$y_n =$$

$$= \begin{bmatrix} \tau_{11}x_1 & & & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & \\ \tau_{m1}\frac{x_m}{x_{m-1}} & \tau_{m2}\frac{x_{m-1}}{x_{m-2}} & \dots & \tau_{mm}x_1 & & & \\ \tau_{m+1,1}\frac{x_{m+1}}{x_m} & \tau_{m+1,2}\frac{x_m}{x_{m-1}} & \dots & \tau_{m+1,m}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \dots & \tau_{n-1,m}\frac{x_{n-m}}{x_{n-m-1}} & \frac{x_{n-m-1}}{x_{n-m-2}} & \dots & x_1 \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & \tau_{nm}\frac{x_{n-m+1}}{x_{n-m}} & \frac{x_{n-m}}{x_{n-m-1}} & \dots & \frac{x_2}{x_1}\ x_1 \end{bmatrix}; \tag{2.65}$$

$$y_n = x_1y_{n-1} + x_2y_{n-2} + x_3y_{n-3} + \ldots +$$
$$+x_{n-m}y_m + \{\tau_{nm}\}_m x_{n-m+1}y_{m-1} + \{\tau_{n,m-1}\}_m x_{n-m+2}y_{m-2} +$$
$$+ \ldots + \{\tau_{n1}\}_m x_n y_0; \tag{2.66}$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \sum_{i=m}^{n} A(\lambda,\tau,i)\times$$
$$\times \frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}, \tag{2.67}$$

де $\tau_{ij} = 1$ *при* $m+1 \le j \le n$,

$$A(\lambda,\tau,i) =$$
$$\sum_{r=1}^{m}(k-r)! \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=m,\\ \alpha_j\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},j=1,\ldots,r}} \lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_{r-1}}\lambda_{i-m+\alpha_r}\times$$
$$\times\{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m \prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m, \tag{2.68}$$

причому

$$\underbrace{\lambda_{\alpha_j}\lambda_{\alpha_j}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_j}}_{k}=\lambda_{\alpha_j}^{\underline{k}}=$$

$$=\lambda_{\alpha_j}(\lambda_{\alpha_j}-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda_{\alpha_j}-k+1),\ j=1,\ldots,r$$

рівносильні між собою.

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 2.9.

Приклад 2.8. *Знайдемо коефіцієнт* $A(\lambda,\tau,i)$ *із теореми 2.10 при* $m=1$. *Згідно із (2.67) маємо*

$$y_n=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\sum_{i=m}^{n}\sum_{r=1}^{m}(k-r)!\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=m,\\ \alpha_j\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},j=1,\ldots,r}}\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_{r-1}}\lambda_{i-m+\alpha_r}\times$$

$$\times\{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m\prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m\frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}.$$

Але

$$m=1,r=1,\alpha_r=1,$$

тому

$$y_n=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\sum_{i=1}^{n}(k-1)!\lambda_{i-1+1}\{\tau_{i,1-1+1}\}_1\frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\tau_{i,1}\frac{(k-1)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

А це по суті співпадає із (2.51).

Знайдемо коефіцієнт $A(\lambda,\tau,i)$ *із теореми 2.10 при* $m=2$.

Маємо:

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \sum_{i=m}^{n}\sum_{r=1}^{m}(k-r)! \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=m,\\ \alpha_j\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},j=1,\ldots,r}} \lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_{r-1}}\lambda_{i-m+\alpha_r}\times$$

$$\times\{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m \prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m \frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}.$$

Знайдемо суму

$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{r=1}^{m}(k-r)! \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=m,\\ \alpha_j\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},j=1,\ldots,r}} \lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_{r-1}}\lambda_{i-m+\alpha_r}\times$$

$$\times\{\tau_{i,m-\alpha_r+1}\}_m \prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_m$$

при $m = 2$.

Маємо

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{r=1}^{2}(k-r)! \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2,\\ \alpha_j\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},j=1,\ldots,r}} \lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_{r-1}}\lambda_{i-2+\alpha_r}\times$$

$$\times\{\tau_{i,2-\alpha_r+1}\}_2 \prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_2.$$

Якщо $r = 1$, *то* $\alpha_1 = 2$ *і остання сума прийме вигляд*

$$\sum_{i=2}^{n}(k-1)!\lambda_i\{\tau_{i,1}\}_2 = (k-1)!\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\tau_{i+1,1}\tau_{i+1,2}.$$

Це узгоджується із (2.60).

Якщо ж $r = 2$, *то* $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ *і матимемо*

$$(k-2)!\sum_{i=2}^{n}\lambda_1\lambda_{i-1}\{\tau_{i,2}\}_2\{\tau_{1,1}\}_2 =$$

$$= (k-2)! \left(\lambda_1(\lambda_1 - 1)\tau_{1,1}\tau_{2,2} + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_1 \tau_{1,1} \lambda_i \tau_{i+1,2} \right).$$

Цей результат також узгоджується із (2.60).

Наслідок 2.6. *Рівності*

$$y_n =$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{11}x_1 & & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & & & \\ \tau_{31}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{33}x_1 & & & \\ \tau_{41}\frac{x_4}{x_3} & \tau_{42}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{43}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n-1,2}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \tau_{n-1,3}\frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \frac{x_{n-4}}{x_{n-5}} & \cdots & x_1 \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \tau_{n3}\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}} & \cdots & \frac{x_2}{x_1}\ x_1 \end{bmatrix}; \tag{2.69}$$

$$y_n = x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \ldots + x_{n-3} y_3 +$$
$$+ \{\tau_{n3}\}_3 x_{n-2} y_2 + \{\tau_{n,2}\}_3 x_{n-1} y_1 +$$
$$\{\tau_{n1}\}_3 x_n y_0; \tag{2.70}$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \sum_{i=3}^{n} A(\lambda, \tau, i) \times$$
$$\times \frac{x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}, \tag{2.71}$$

де

$$A(\lambda, \tau, i) = (k-1)! \lambda_i \tau_{i1} \tau_{i2} \tau_{i3} + (k-2)! (\lambda_1 \lambda_{i-1} \tau_{11} \tau_{i2} \tau_{i3} +$$
$$+ (k-3) \lambda_2 \lambda_{i-2} \tau_{21} \tau_{22} \tau_{i3}) + ! \lambda_1 \lambda_1 \lambda_{i-2} \tau_{11} \tau_{22} \tau_{i3} \tag{2.72}$$

рівносильні між собою.

Доведення. Рівності (2.69), (2.70) отримуємо відповідно із рівностей (2.65), (2.66) при $m = 3$.

Доведемо справедливість рівності (2.72). За теоремою 2.10 маємо

$$A(\lambda,\tau,i)=\sum_{r=1}^{3}(k-r)!\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=3,\\ \alpha_j\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},j=1,\ldots,r}}\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_{r-1}}\lambda_{i-3+\alpha_r}\times$$

$$\times\{\tau_{i,3-\alpha_r+1}\}_3\prod_{s=1}^{r-1}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_3.$$

Але, якщо $r = 1$, то $\alpha_1 = \alpha_r = 3$ і у останню суму входитиме вираз вигляду

$$(k-1)!\lambda_i\tau_{i1}\tau_{i2}\tau_{i3}.$$

Якщо $r = 2$, то рівність

$$\alpha_1+\alpha_2=3$$

має лише два корені на множині натуральних чисел: $(1, 2), (2, 1)$. Цим кореням відповідатиме сума

$$(k-2)!(\lambda_1\lambda_{i-1}\{\tau_{i2}\}_3\{\tau_{11}\}_3+\lambda_2\lambda_{i-2}\{\tau_{i3}\}_3\{\tau_{21}\}_3)=$$

$$=(k-2)!(\lambda_1\lambda_{i-1}\tau_{i2}\tau_{i3}\tau_{11}+\lambda_2\lambda_{i-2}\tau_{i3}\tau_{21}\tau_{22}).$$

Якщо ж $r = 3$, то рівність

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3$$

має лише один натуральний корінь $(1, 1, 1)$, якому відповідатиме доданок

$$(k-3)!\lambda_1\lambda_1\lambda_{i-2}\tau_{i3}\tau_{11}\tau_{22}.$$

Отже, рівність (2.72) виконується. □

Приклад 2.9. *Знайдемо значення парапермanента*

$$y_n = \begin{bmatrix} \tau_{11}x_1 & & & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & & & \\ \tau_{31}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{32}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{33}x_1 & & & \\ \tau_{41}\frac{x_4}{x_3} & \tau_{42}\frac{x_3}{x_2} & \tau_{43}\frac{x_2}{x_1} & & & \\ \tau_{51}\frac{x_5}{x_4} & \tau_{52}\frac{x_4}{x_3} & \tau_{53}\frac{x_3}{x_2} & \frac{x_2}{x_1} & x_1 & \\ \tau_{61}\frac{x_6}{x_5} & \tau_{62}\frac{x_5}{x_4} & \tau_{63}\frac{x_4}{x_3} & \frac{x_3}{x_2} & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}$$

за його означенням та за наслідком 2.6.

Многочлен розбиттів 6*-го порядку, який зображується заданою матрицею* 6*-го порядку містить* 32 *доданки.*

$$y_6 = \tau_{11}\tau_{22}\tau_{33}x_1^6+(\tau_{21}\tau_{22}\tau_{33}+\tau_{11}\tau_{32}\tau_{33}+\tau_{11}\tau_{22}\tau_{43}+2\tau_{11}\tau_{22}\tau_{33})x_1^4x_2+$$
$$+(\tau_{31}\tau_{32}\tau_{33}+\tau_{11}\tau_{42}\tau_{43}+\tau_{11}\tau_{22}\tau_{53}+\tau_{11}\tau_{22}\tau_{33})x_1^3x_3+$$
$$+(\tau_{21}\tau_{22}\tau_{43}+2\tau_{21}\tau_{22}\tau_{33}+2\tau_{11}\tau_{32}\tau_{33}+\tau_{11}\tau_{22}\tau_{43})x_1^2x_2^2+$$
$$+(\tau_{41}\tau_{42}\tau_{43}+\tau_{11}\tau_{52}\tau_{53}+\tau_{11}\tau_{22}\tau_{63})x_1^2x_4+$$
$$+(\tau_{11}\tau_{32}\tau_{33}+\tau_{11}\tau_{42}\tau_{43}+\tau_{21}\tau_{22}\tau_{33}+\tau_{21}\tau_{22}\tau_{53}+2\tau_{31}\tau_{32}\tau_{33})x_1x_2x_3+$$
$$+(\tau_{51}\tau_{52}\tau_{53}+\tau_{11}\tau_{62}\tau_{63})x_1x_5+\tau_{21}\tau_{22}\tau_{43}x_2^3+(\tau_{21}\tau_{22}\tau_{63}+\tau_{41}\tau_{42}\tau_{43})x_2x_4+$$
$$+\tau_{31}\tau_{32}\tau_{33}x_3^2+\tau_{61}\tau_{62}\tau_{63}x_6.$$

За наслідком 2.6 маємо

$$\sum_{i=3}^{6} A(\lambda,\tau,i) = \sum_{i=3}^{6}(k-1)!\lambda_i\tau_{i1}\tau_{i2}\tau_{i3}+$$
$$+\sum_{i=3}^{6}(k-2)!(\lambda_1\lambda_{i-1}\tau_{i2}\tau_{i3}\tau_{11}+\lambda_2\lambda_{i-2}\tau_{i3}\tau_{21}\tau_{22})+$$
$$+\sum_{i=3}^{6}(k-3)!\lambda_1\lambda_1\lambda_{i-2}\tau_{i3}\tau_{11}\tau_{22} =$$

$$= (k-1)!(\lambda_3\tau_{31}\tau_{32}\tau_{33} + \lambda_4\tau_{41}\tau_{42}\tau_{43} + \lambda_5\tau_{51}\tau_{52}\tau_{53} + \lambda_6\tau_{61}\tau_{62}\tau_{63}) +$$
$$+(k-2)!(\lambda_1\lambda_2\tau_{11}\tau_{32}\tau_{33} + \lambda_1\lambda_2\tau_{21}\tau_{22}\tau_{33} + \lambda_1\lambda_3\tau_{11}\tau_{42}\tau_{43} + \lambda_2\lambda_2\tau_{21}\tau_{22}\tau_{43} +$$
$$+\lambda_1\lambda_4\tau_{11}\tau_{52}\tau_{53} + \lambda_2\lambda_3\tau_{21}\tau_{22}\tau_{53} + \lambda_1\lambda_5\tau_{11}\tau_{62}\tau_{63} + \lambda_2\lambda_4\tau_{21}\tau_{22}\tau_{63}) +$$
$$+(k-3)!(\lambda_1\lambda_1\lambda_1\tau_{11}\tau_{22}\tau_{33} + \lambda_1\lambda_1\lambda_2\tau_{11}\tau_{22}\tau_{43} +$$
$$+\lambda_1\lambda_1\lambda_3\tau_{11}\tau_{22}\tau_{53} + \lambda_1\lambda_1\lambda_4\tau_{11}\tau_{22}\tau_{63}) = A(\lambda,\tau),$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_6$.

Таким чином,

$$y_6 = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+6\lambda_6=6} \frac{A(\lambda,\tau)}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!\lambda_4!\lambda_5!\lambda_6!} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}x_4^{\lambda_4}x_5^{\lambda_5}x_6^{\lambda_6} =$$

$$= \tau_{11}\tau_{22}\tau_{33}x_1^6 + (\tau_{21}\tau_{22}\tau_{33} + \tau_{11}\tau_{32}\tau_{33} + \tau_{11}\tau_{22}\tau_{43} + 2\tau_{11}\tau_{22}\tau_{33})x_1^4x_2 +$$
$$+(\tau_{31}\tau_{32}\tau_{33} + \tau_{11}\tau_{42}\tau_{43} + \tau_{11}\tau_{22}\tau_{53} + \tau_{11}\tau_{22}\tau_{33})x_1^3x_3 +$$
$$+(\tau_{21}\tau_{22}\tau_{43} + 2\tau_{21}\tau_{22}\tau_{33} + 2\tau_{11}\tau_{32}\tau_{33} + \tau_{11}\tau_{22}\tau_{43})x_1^2x_2^2 +$$
$$+(\tau_{41}\tau_{42}\tau_{43} + \tau_{11}\tau_{52}\tau_{53} + \tau_{11}\tau_{22}\tau_{63})x_1^2x_4 +$$
$$+(\tau_{11}\tau_{32}\tau_{33} + \tau_{11}\tau_{42}\tau_{43} + \tau_{21}\tau_{22}\tau_{33} + \tau_{21}\tau_{22}\tau_{53} + 2\tau_{31}\tau_{32}\tau_{33})x_1x_2x_3 +$$
$$+(\tau_{51}\tau_{52}\tau_{53} + \tau_{11}\tau_{62}\tau_{63})x_1x_5 + \tau_{21}\tau_{22}\tau_{43}x_2^3 + (\tau_{21}\tau_{22}\tau_{63} + \tau_{41}\tau_{42}\tau_{43})x_2x_4 +$$
$$+\tau_{31}\tau_{32}\tau_{33}x_3^2 + \tau_{61}\tau_{62}\tau_{63}x_6.$$

Важливим граничним частинним випадком теореми 2.9 є наступний

Наслідок 2.7. *Наступні рівності рівносильні між собою:*

$$y_n = \left\langle \begin{array}{cccc} \tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{n-1,n-1}x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & \tau_{n,n-1}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{nn}x_1 \end{array} \right\rangle_n \tag{2.73}$$

$$y_n = \{\tau_{nn}\}x_1 y_{n-1} - \{\tau_{n,n-1}\}x_2 y_{n-2} +$$
$$+\{\tau_{n,n-2}\}x_3 y_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2}\{\tau_{n2}\}x_{n-1}y_1 +$$
$$+(-1)^{n-1}\{\tau_{n1}\}x_n y_0 \qquad (2.74)$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} A(\lambda,\tau,n)\frac{x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}, \qquad (2.75)$$

де

$$A(\lambda,\tau,n) = \sum_{r=1}^{n}(k-r)!\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n,\\ \alpha_i\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},\, i=\overline{1,r}}} \lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_r}\times$$
$$\times\prod_{s=1}^{r}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\},$$

або

$$A(\lambda,\tau,n) = \begin{pmatrix} (k-1)! \\ (k-2)! \\ \vdots \\ (k-n)! \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \lambda_1\tau_{11} & & & \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\tau_{21} & \lambda_1\tau_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\tau_{n1} & \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}}\tau_{n2} & \ldots & \lambda_1\tau_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (2.76)$$

де добуток

$$\underbrace{\lambda_i\cdot\ldots\cdot\lambda_i}_{k}$$

розглядається як спадний факторіальний степінь $\lambda_i^{\underline{k}}$

Доведення. При $m = n$ рівності (2.65-2.62), очевидно, перейдуть у рівності (2.73-2.74). Покладемо у рівності (2.67) $m = n$, тоді матимемо

$$\sum_{i=m}^{n} A(\lambda, \tau, i) = A(\lambda, \tau, n),$$

причому

$$\{\tau_{n,n-\alpha_r+1}\}_n = \{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r,\alpha_1+\ldots+\alpha_{r-1}+1}\}_n$$

і вона перейде у рівність (2.75). Те, що $A(\lambda, \tau, n)$ можна подати у вигляді скалярного добутку (2.76) випливає безпосередньо із означення парадетермінанта та скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці. □

Аналогічно формулюється та доводиться відповідний наслідок для параперманента трикутної матриці.

Наслідок 2.8. *Наступні рівності рівносильні між собою:*

$$y_n = \begin{bmatrix} \tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\frac{x_2}{x_1} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{n-1,n-1}x_1 & \\ \tau_{n1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & \tau_{n,n-1}\frac{x_2}{x_1} & \tau_{nn}x_1 \end{bmatrix}_n ; \tag{2.77}$$

$$y_n = \{\tau_{nn}\}x_1y_{n-1} + \{\tau_{n,n-1}\}x_2y_{n-2} + \{\tau_{n,n-2}\}x_3y_{n-3} + \ldots + \{\tau_{n2}\}x_{n-1}y_1 + \{\tau_{n1}\}x_ny_0; \tag{2.78}$$

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} A(\lambda, \tau, n)\frac{x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}, \tag{2.79}$$

де

$$A(\lambda,\tau,n)=\sum_{r=1}^{n}(k-r)!\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n,\\ \alpha_i\in\{1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\},\,i=\overline{1,r}}}\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{\alpha_r}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{r}\{\tau_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\},$$

або

$$A(\lambda,\tau,n)=\begin{pmatrix}(k-1)!\\(k-2)!\\\vdots\\(k-n)!\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\lambda_1\tau_{11}&&&\\\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\tau_{21}&\lambda_1\tau_{22}&&\\\vdots&\ldots&\ddots&\\\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\tau_{n1}&\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}}\tau_{n2}&\ldots&\lambda_1\tau_{nn}\end{bmatrix},\qquad(2.80)$$

де добуток

$$\underbrace{\lambda_i\cdot\ldots\cdot\lambda_i}_{k}$$

розглядається як спадний факторіальний степінь $\lambda_i^{\underline{k}}$

Приклад 2.10. *Побудуємо многочлен розбиттів, що зображується параперманентом четвертого порядку*

$$\begin{bmatrix}x_1&&&\\2\frac{x_2}{x_1}&x_1&&\\3\frac{x_3}{x_2}&4\frac{x_2}{x_1}&x_1&\\4\frac{x_4}{x_3}&2\frac{x_3}{x_2}&(-1)\frac{x_2}{x_1}&x_1\end{bmatrix}.$$

Маємо

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4=4}\frac{A}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!\lambda_4!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}x_4^{\lambda_4},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} (k-1)! \\ (k-2)! \\ (k-3)! \\ (k-4)! \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ 2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & \lambda_1 & & \\ 3\frac{\lambda_3}{\lambda_2} & 4\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & \lambda_1 & \\ 4\frac{\lambda_4}{\lambda_3} & 2\frac{\lambda_3}{\lambda_2} & (-1)\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & \lambda_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda_1^4 + 10\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2^2 + 5\lambda_1^2\lambda_2 - 8\lambda_4.$$

Тому

$$\begin{bmatrix} x_1 & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ 3\frac{x_3}{x_2} & 4\frac{x_2}{x_1} & x_1 & \\ 4\frac{x_4}{x_3} & 2\frac{x_3}{x_2} & (-1)\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4=4} \frac{\lambda_1^4 + 10\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2^2 + 5\lambda_1^2\lambda_2 - 8\lambda_4}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!\lambda_4!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} x_4^{\lambda_4} =$$

$$= x_1^4 + 5x_1^2x_2 + 10x_1x_3 - 2x_2^2 - 8x_4.$$

Із цього прикладу видно, що кожному невпорядкованому розбиттю числа 4 відповідає значення єдиного ненульового одночлена многочлена

$$\lambda_1^4 + 10\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2^2 + 5\lambda_1^2\lambda_2 - 8\lambda_4,$$

що співпадає з коефіцієнтом відповідного одночлена шуканого многочлена розбиттів.

Висновки до розділу 2

Таким чином, при допомозі зображень многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць, можна довести деякі загальні теореми про многочлени розбиттів, будувати взаємно

обернені класи многочленів розбиттів, впорядкувати та систематизувати відомі результати теорії многочленів розбиттів та побудувати нові класи многочленів розбиттів. Так, у першому підрозділі другого розділу побудовано два широкі класи взаємно обернених многочленів розбиттів. Зауважимо, що відомі пари взаємно обернених многочленів розбиттів можна перелічити на пальцях однієї руки. У другому підрозділі другого розділу вивчено властивості многочленів розбиттів, що зображуються парафункціями трикутних матриць похилої структури з першим довільним стовпцем. До цього класу належить ряд відомих многочленів розбиттів, що зустрічається у алгебрі. Прикладом таких многочленів слугують многочлени розбиттів, в яких степеневі суми виражаються через елементарні симетричні многочлени або через повні однорідні симетричні многочлени. Аналогічні приклади можна знайти також у теорії чисел. Третій підрозділ другого розділу присвячений вивченню многочленів розбиттів, що зображуються парафункціями трикутних матриць похилої структури з двома першими довільними стовпцями. Це дуже широкий клас многочленів розбиттів, однак досі в існуючій літературі вони не з'являлися. У четвертому підрозділі доведено загальну теорему про зображення многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць, однак алгоритми побудови таких многочленів розбиттів відзначаються складністю за кількістю операцій.

Зауважимо, що у другому розділі, при допомозі розкладу парафункцій трикутних матриць за елементами останнього рядка, вперше кожному многочлену розбиттів ставиться у відповідність лінійне рекурентне співвідношення. Таким чином мо-

жна побудувати бієктивні відповідності між многочленами розбиттів, парафункціями трикутних матриць похилої структури, що їх зображують та лінійними рекурентними співвідношеннями, що їх генерують.

РОЗДІЛ 3

ТЕОРЕТИКО–ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ ТА МНОГОЧЛЕНИ РОЗБИТТІВ

У першому підрозділі цього розділу розглядаються теоретико-числові функції натурального аргументу, що узагальнюють класичні функції натурального аргументу – суму натуральних дільників натурального числа та число невпорядкованих розбиттів натурального числа. Поняття про ці функції наведено вкінці другого підрозділу першого розділу. Дослідження проводяться при допомозі апарату числення трикутних матриць, необхідні відомості про який також можна знайти у другому підрозділі першого розділу.

Теорема 3.1 цього підрозділу дає зображення m-арних чисел $b_m(n), \xi_m(n), d_m(n)$ у вигляді парафункцій трикутних матриць. У теоремі 3.2. встановлено лінійні рекурентні співвідношення, з допомогою яких можна побудувати ефективні алгоритми обчислення цих чисел, а у теоремі 3.3. – зображення цих чисел у вигляді многочленів розбиттів.

Другий підрозділ цього розділу присвячений модифікації класичної теоретико-числової формули обернення.

3.1. Теоретико-числові функції, пов'язані з розбиттями та сумами дільників натурального числа

Доведемо, при допомозі апарату числення трикутних матриць ще три теореми, які встановлюють додаткові зв'язки між

m-арними числами $b_m(n), \xi_m(n), d_m(n)$, що розглядалися в [46].

Теорема 3.1. *Справедливі рівності:*

$$b_m(n) = \begin{bmatrix} \xi_m(1) & & & & \\ \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & \frac{1}{2}\xi_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \frac{\xi_m(n-2)}{\xi_m(n-3)} & \dots & \frac{1}{n-1}\xi_m(1) & \\ \frac{\xi_m(n)}{\xi_m(n-1)} & \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \dots & \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & \frac{1}{n}\xi_m(1) \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

$$d_m(n) =$$

$$\begin{bmatrix} -\xi_m(1) & & & & \\ \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & -\frac{1}{2}\xi_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \frac{\xi_m(n-2)}{\xi_m(n-3)} & \dots & -\frac{1}{n-1}\xi_m(1) & \\ \frac{\xi_m(n)}{\xi_m(n-1)} & \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \dots & \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & -\frac{1}{n}\xi_m(1) \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^n \left\langle \begin{matrix} \xi_m(1) & & & & \\ \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & \frac{1}{2}\xi_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \frac{\xi_m(n-2)}{\xi_m(n-3)} & \dots & \frac{1}{n-1}\xi_m(1) & \\ \frac{\xi_m(n)}{\xi_m(n-1)} & \frac{\xi_m(n-1)}{\xi_m(n-2)} & \dots & \frac{\xi_m(2)}{\xi_m(1)} & \frac{1}{n}\xi_m(1) \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.2}$$

$$\xi_m(n) = (-1)^{n-1} \left\langle \begin{matrix} b_m(1) & & & & \\ 2 \cdot \frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ (n-1) \cdot \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \frac{b_m(n-2)}{b_m(n-3)} & \dots & b_m(1) & \\ n \cdot \frac{b_m(n)}{b_m(n-1)} & \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \dots & \frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.3}$$

$$\xi_m(n) =$$

$$= (-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{cccccc} -d_m(1) & & & & & \\ -2\cdot\frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ -(n-1)\cdot\frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \frac{d_m(n-2)}{d_m(n-3)} & \dots & d_m(1) & & \\ -n\cdot\frac{d_m(n)}{d_m(n-1)} & \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \dots & \frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) \end{array} \right\rangle =$$

$$= (-1)^{n}\left\langle \begin{array}{cccccc} d_m(1) & & & & & \\ 2\cdot\frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ (n-1)\cdot\frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \frac{d_m(n-2)}{d_m(n-3)} & \dots & d_m(1) & & \\ n\cdot\frac{d_m(n)}{d_m(n-1)} & \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \dots & \frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) \end{array} \right\rangle, \tag{3.4}$$

$$b_m(n) = (-1)^{n}\left\langle \begin{array}{cccccc} d_m(1) & & & & & \\ \frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \frac{d_m(n-2)}{d_m(n-3)} & \dots & d_m(1) & & \\ \frac{d_m(n)}{d_m(n-1)} & \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \dots & \frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) \end{array} \right\rangle, \tag{3.5}$$

$$d_m(n) = (-1)^{n}\left\langle \begin{array}{cccccc} b_m(1) & & & & & \\ \frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \frac{b_m(n-2)}{b_m(n-3)} & \dots & b_m(1) & & \\ \frac{b_m(n)}{b_m(n-1)} & \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \dots & \frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) \end{array} \right\rangle. \tag{3.6}$$

Доведення. Рівності (3.1), (3.2) випливають із рекурентних співвідношень теореми 3 (див. [46], стор. 70). Дійсно, розкладання цих парапермanентів приводить до цих рівностей. Рівності (3.3),

(3.4) можна отримати обертаючи рівності (3.1), (3.2) (див. теорема 1.7). Рівності (3.5), (3.6) безпосередньо випливають із теореми 1.3 про зв'язок детермінантів із парадетермінантами. □

Приклад 3.1. *Перевіримо рівність (3.4) при* $m = 2, n = 5$.

$$\xi_3(5) = (-1)^5 \left\langle \begin{array}{ccccc} d_3(1) & & & & \\ 2\frac{d_3(2)}{d_3(1)} & d_3(1) & & & \\ 3\frac{d_3(3)}{d_3(2)} & \frac{d_3(2)}{d_3(1)} & d_3(1) & & \\ 4\frac{d_3(4)}{d_3(3)} & \frac{d_3(3)}{d_3(2)} & \frac{d_3(2)}{d_3(1)} & d_3(1) & \\ 5\frac{d_3(5)}{d_3(4)} & \frac{d_3(4)}{d_3(3)} & \frac{d_3(3)}{d_3(2)} & \frac{d_3(2)}{d_3(1)} & d_3(1) \end{array} \right\rangle.$$

Але, позаяк

$$d_3(1) = -1, d_3(2) = 0, d_3(3) = -1, d_3(4) = 1, d_3(5) = 0,$$

то

$$\xi_3(5) = -\left\langle \begin{array}{ccccc} -1 & & & & \\ 2\frac{0}{-1} & -1 & & & \\ 3\frac{-1}{0} & \frac{0}{-1} & -1 & & \\ 4\frac{1}{-1} & \frac{-1}{0} & \frac{0}{-1} & -1 & \\ 5\frac{0}{1} & \frac{1}{-1} & \frac{-1}{0} & \frac{0}{-1} & -1 \end{array} \right\rangle.$$

Позначимо парадетермінант правої частини цієї рівності через $\diamond_5$ *та розкладемо його за елементами останнього рядка:*

$$\diamond_5 = (-1) \cdot \diamond_4 - 0 \cdot \diamond_3 + (-1) \cdot \diamond_2 - \diamond_1 + 0 \cdot \diamond_0 = -(\diamond_4 + \diamond_2 + \diamond_1).$$

Але $\diamond_1 = -1, \diamond_2 = 1,$ *а*

$$\diamond_4 = -1 \cdot \diamond_3 - \diamond_1 - 4 = (-1)(-4) - (-1) - 4 = 1,$$

тому $\diamond_5 = -(1 + 1 - 1) = -1$. *Таким чином,*

$$\xi_3(5) = 1.$$

Доведемо теорему про рекурентні співвідношення, що пов'язують між собою m-арні числа $b_m(n), \xi_m(n), d_m(n)$.

Теорема 3.2. *Справедливі рівності:*

$$\xi_m(n) = -(b_m(1)\xi_m(n-1) + b_m(2)\xi_m(n-2) + \ldots + \\ + b_m(n-1)\xi_m(1) - nb_m(n)\xi_m(0)), \tag{3.7}$$

$$\xi_m(n) = -(d_m(1)\xi_m(n-1) + d_m(2)\xi_m(n-2) + \ldots + \\ + d_m(n-1)\xi_m(1) + nd_m(n)\xi_m(0)), \tag{3.8}$$

$$b_m(n) = -(d_m(1)b_m(n-1) + d_m(2)b_m(n-2) + \ldots + \\ + d_m(n-1)b_m(1) + d_m(n)b_m(0)), \tag{3.9}$$

$$d_m(n) = -(b_m(1)d_m(n-1) + b_m(2)d_m(n-2) + \ldots + \\ + b_m(n-1)d_m(1) + b_m(n)d_m(0)), \tag{3.10}$$

де $b_m(0) = d_m(0) = \xi_m(0) = 1$.

Доведення. Доведемо рекурентне співвідношення (3.7). Для цього перемножимо обидві сторони рівності (3.3) на $(-1)^{n-1}$ та розкладемо парадетермінант правої частини утвореної рівності за елементами останнього рядка. При цьому отримаємо рівність

$$(-1)^{n-1}\xi_m(n) = b_m(1)(-1)^{n-2}\xi_m(n-1) - b_m(2)(-1)^{n-3}\xi_m(n-2) + \ldots + \\ + (-1)^{n-2}b_m(n-1)(-1)^{n-n}\xi_m(n-(n-1)) + (-1)^{n-1}b_m(n)\times \\ \times(-1)^{n-(n+1)}\xi_m(n-n),$$

з якої після множення обох частин рівності на $(-1)^{n-1}$ отримаємо рівність (3.7).

Для доведення рекурентного співвідношення перемножимо спочатку обидві сторони рівності (3.4) на $(-1)^n$ та розкладемо

парадетермінант правої частини цієї рівності за елементами останнього рядка.

$$(-1)^n\xi_m(n) = d_m(1)(-1)^{n-1}\xi_m(n-1) - d_m(2)(-1)^{n-2}\xi_m(n-2) + \ldots +$$
$$+(-1)^{n-2}d_m(n-1)(-1)^1\xi_m(1) + (-1)^{n-1}d_m(n)(-1)^0\xi_m(0).$$

Перемножуючи обидві частини останньої рівності на $(-1)^n$ отримаємо рівність (3.8).

Доведемо справедливість рекурентного співвідношення (3.9). Перемножимо обидві сторони рівності (3.5) на $(-1)^n$ та розкладемо парадетермінант правої частини утвореної рівності за елементами останнього рядка. При цьому отримаємо

$$(-1)^n b_m(n) = d_m(1)(-1)^{n-1}b_m(n-1) - d_m(2)(-1)^{n-2}b_m(n-2) + \ldots +$$
$$+(-1)^{n-2}d_m(n-1)(-1)^{n-(n-1)}b_m(n-(n-1)) + (-1)^{n-1}\times$$
$$\times d_m(n)(-1)^{n-n}b_m(n-n),$$

з якої легко отримати потрібну рівність.

Накінець, перемножуючи обидві частини рівності (3.10) на $(-1)^n$, доведемо справедливість рівності (3.6).

$$(-1)^n d_m(n) = b_m(1)(-1)^{n-1}d_m(n-1) - b_m(2)(-1)^{n-2}d_m(n-2) + \ldots +$$
$$+(-1)^{n-2}b_m(n-1)(-1)^1 d_m(1) + (-1)^{n-1}b_m(n)(-1)^0 d_m(0).$$

Тепер, перемножуючи обидві частини отриманої рівності на $(-1)^n$, прийдемо до рівності (3.10).

□

Приклад 3.2. *Перевіримо рекурентне співвідношення (3.8) при* $m = 3, n = 5$.

$$\xi_3(5) = -(d_3(1)\xi_3(4) + d_3(2)\xi_3(3) + d_3(3)\xi_3(2) + d_3(4)\xi_3(1) + 5d_3(5)\xi_3(0)).$$

Але

$$d_3(1) = -1, d_3(2) = 0, d_3(3) = -1, d_3(4) = 1, d_3(5) = 0,$$

$$\xi_3(0) = 1, \xi_3(1) = 1, \xi_3(2) = 1, \xi_3(3) = 4, \xi_3(4) = 1,$$

тому

$$\xi_3(5) = -((-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 1) = 1.$$

В наступній теоремі встановлено многочлени разбиттів, які задають m-арні числа $b_m(n), \xi_m(n), d_m(n)$.

Теорема 3.3. *Справедливі рівності:*

$$d_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^k \frac{\xi_m^{\lambda_1}(1) \cdot \ldots \cdot \xi_m^{\lambda_n}}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n! 1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}}, \quad (3.11)$$

$$\xi_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k-1} \frac{n(k-1)!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot b_m^{\lambda_1}(1) \cdot \ldots \cdot b_m^{\lambda_n}(n), \quad (3.12)$$

$$\xi_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^k \frac{n(k-1)!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot d_m^{\lambda_1}(1) \cdot \ldots \cdot d_m^{\lambda_n}(n), \quad (3.13)$$

$$b_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^k \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot d_m^{\lambda_1}(1) \cdot \ldots \cdot d_m^{\lambda_n}(n), \quad (3.14)$$

$$d_m(n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^k \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot b_m^{\lambda_1}(1) \cdot \ldots \cdot b_m^{\lambda_n}(n), \quad (3.15)$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Доведення. Многочлен розбиттів, що відповідає рівності (3.1) встановлено у [46] (див. теорема 1.10). Тому многочлен розбиттів,

що відповідає рівності (3.2) відрізнятиметься від попереднього многочлена розбиттів лише знаками $(-1)^{n-k}$. Отже

$$d_m(n) = (-1)^n \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{\xi_m(1)^{\lambda_1}\xi_m(2)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\xi_m(n)^{\lambda_n}}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\lambda_2!2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^k \frac{\xi_m(1)^{\lambda_1}\xi_m(2)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\xi_m(n)^{\lambda_n}}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\lambda_2!2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}.$$

Побудуємо многочлен розбиттів, що відповідає рівності (3.3). Для цього скористаємося загальною теоремою про зображення многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць похилої структури з першим довільним стовпцем (див. теорема 2.3), рівності (2.46), (2.51). Маємо

$$(-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{cccc} b_m(1) & & & \\ 2\cdot\frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ (n-1)\cdot\frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \frac{b_m(n-2)}{b_m(n-3)} & \ldots & b_m(1) \\ n\cdot\frac{b_m(n)}{b_m(n-1)} & \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \ldots & \frac{b_m(2)}{b_m(1)} \quad b_m(1) \end{array} \right\rangle =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i i\right) \frac{(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot$$

$$\cdot b_m(1)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot b_m(n)^{\lambda_n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{n(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} b_m(1)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot b_m(n)^{\lambda_n}.$$

Порівнюючи рівності (3.3) та (3.4) приходимо до висновку, що многочлен розбиттів, який відповідає парадетермінанту правої частини рівності (3.4), має вигляд многочлена розбиттів (3.13).

Многочлени розбиттів, що відповідають парадетермінантам правих частин рівностей (3.5), (3.6) не відрізняються своєю структурою. Для встановлення їх вигляду скористаємося теоремою (1.8) із першого розділу. Маємо:

$$b_m(n) = (-1)^n \left\langle \begin{array}{cccc} d_m(1) & & & \\ \frac{d_m(2)}{d_m(1)} & d_m(1) & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \frac{d_m(n-2)}{d_m(n-3)} & \dots & d_m(1) \\ \frac{d_m(n)}{d_m(n-1)} & \frac{d_m(n-1)}{d_m(n-2)} & \dots & \frac{d_m(2)}{d_m(1)} \quad d_m(1) \end{array} \right\rangle =$$

$$= (-1)^n \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot d_m^{\lambda_1}(1) \cdot \ldots \cdot d_m^{\lambda_n}(n) =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot d_m^{\lambda_1}(1) \cdot \ldots \cdot d_m^{\lambda_n}(n).$$

Аналогічно отримуємо рівність (3.15):

$$d_m(n) = (-1)^n \left\langle \begin{array}{cccc} b_m(1) & & & \\ \frac{b_m(2)}{b_m(1)} & b_m(1) & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \frac{b_m(n-2)}{b_m(n-3)} & \dots & b_m(1) \\ \frac{b_m(n)}{b_m(n-1)} & \frac{b_m(n-1)}{b_m(n-2)} & \dots & \frac{b_m(2)}{b_m(1)} \quad b_m(1) \end{array} \right\rangle =$$

$$= (-1)^n \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot b_m^{\lambda_1}(1) \cdot \ldots \cdot b_m^{\lambda_n}(n) =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot b_m^{\lambda_1}(1) \cdot \ldots \cdot b_m^{\lambda_n}(n).$$

□

Приклад 3.3. *Перевіримо рівність (3.13) при* $m = 3, n = 5$. *Зауважимо, що*

$$d_3(1) = -1, d_3(2) = 0, d_3(3) = -1, d_3(4) = 1, d_3(5) = 0.$$

$$\xi_3(5) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4+5\lambda_5=5} (-1)^k \frac{n(k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!\lambda_4!\lambda_5!} \cdot$$
$$\cdot d_3(1)^{\lambda_1} d_3(2)^{\lambda_2} d_3(3)^{\lambda_3} d_3(4)^{\lambda_4} d_3(5)^{\lambda_5} =$$
$$= 1 - 5 \cdot (-1)^2(-1)^1 + 5 \cdot (-1)^1 \cdot 1^1 = 1.$$

3.2. Модифікація теореми обернення Мебіуса

У цьому параграфі будується функція Мебіуса частково впорядкованої множини (ч.в.м.) та при її допомозі модифікується теорема обернення Мебіуса.

Нехай

$$A = \{x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}\}$$

– деяка мультимножина [10]; $P(A)$ – її мультибулеан, тобто множина всіх підмультимножин мультимножини A; $(P(A), \subseteq)$ – частково впорядкована множина.

Теорема 3.4. *Функція Мебіуса* $\mu(C, B)$ *частково впорядкованої множини* $(P(A), \subseteq)$ *має вигляд*

$$\mu(C, B) = \begin{cases} (-1)^{|B-C|}, & \text{якщо } B - C = [B - C], \\ 0, & \text{якщо } B - C \neq [B - C], \end{cases} \tag{3.16}$$

де

$$C \subseteq B \in (P(A), \subseteq),$$

а $[X]$*- база мультимножини* X.

Доведення. За означенням, функція Мебіуса на ч.в.м. $(A, \leqslant)$ задається рівністю

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = y, \\ -\sum_{z:x\leqslant z<y} \mu(x,z), & \text{якщо } x < y, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

тому якщо мультимножини B і C рівні, то їх різниця дорівнює порожній множині і $\mu(C,B) = 1$, що узгоджується із рівністю (3.16).

Нехай $B - C = [B - C]$ і $|B - C| \leqslant k$. Припустимо, що

$$\mu(C,B) = (-1)^{|B-C|}$$

та обчислимо її значення для мультимножин C', B' таких, що $B' - C' = [B' - C']$ і $|B' - C'| = k + 1$:

Маємо

$$\mu(C',B') = -\sum_{C'\subseteq X\subset B'} \mu(C',X).$$

Очевидно, що

$$|X - C'| \leqslant k$$

і всіх пар мультимножин (C', X), для яких виконується рівність

$$|X - C'| = i,\ 0 \leqslant i \leqslant k$$

є рівно

$$\binom{k+1}{i},$$

тому

$$\mu(C',B') = -\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i} =$$

$$= -\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i} - (-1)^{k+1}\binom{k+1}{k+1}\right) = (-1)^{k+1}.$$

Якщо

$$B - C = [B - C] \subset B - C,$$

то за індукцією маємо

$$\mu(C', B') = -\left(\sum_{\substack{C'\subseteq X\subset B',\\ X-C'\subseteq[B'-C']}} \mu(C', X) + \sum_{\substack{C'\subseteq Y\subset B',\\ [Y-C']\subset B'-C'}} \mu(C', Y)\right) =$$

$$= -\left(\sum_{i=0}^{|[B'-C']|}(-1)^i\binom{|[B'-C']|}{i} + 0\right) = 0.$$

□

Приклад 3.4. *Нехай*

$$C = \{a, b, c^2, d^3\}, B = \{a, b^2, c^4, d^3\}.$$

Обчислимо $\mu(C, B)$ за рекурентним означенням та перевіримо чи узгоджується результат із теоремою 3.4.

$$\mu(C, B) = -(\mu(C, C) + \mu(C, C + \{b\}) + \mu(C, C + \{c\}) +$$

$$+\mu(C, C + \{b, c\}) + \mu(C, C + \{c^2\}) + \mu(C, C + \{b, c^2\})).$$

Але

$$\mu(C, C) = 1, \mu(C, C + \{b\}) = -1, \mu(C, C + \{c\}) = -1,$$

$$\mu(C, C + \{b, c\}) = 1, \mu(C, C + \{c^2\}) = 0, \mu(C, C + \{b, c^2\}) = 0,$$

тому

$$\mu(C, B) = 0.$$

З іншого боку маємо

$$B - C = \{b, c^2\},\ [B - C] = \{b, c\}$$

і за теоремою 3.4 $\mu(C, B)$ *також дорівнює нулю.*

Зауважимо, що у випадку, коли A є множиною, то її функція Мебіуса має вигляд

$$\mu(C, B) = (-1)^{|B-C|}.$$

Якщо ж $C = \varnothing$, то (3.16) має вигляд

$$\mu(B) = \begin{cases} (-1)^{|B|}, & \text{якщо } B = [B], \\ 0, & \text{якщо } B \neq [B]. \end{cases}$$

Лема 3.1. *Справедлива рівність*

$$\sum_{X \subseteq B} \mu(X) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } B = \varnothing, \\ 0, & \textit{якщо } B \neq \varnothing. \end{cases}$$

Доведення. Якщо $B = \oslash$, то $\mu(\oslash) = 1$ за означенням функції Мебіуса. Якщо ж $\mu(\oslash) \neq 1$, то

$$\sum_{X \subseteq B} \mu(X) = \sum_{\substack{Y' \subseteq B \\ Y' = [Y']}} \mu(Y') + \sum_{\substack{Y'' \subseteq B \\ Y'' \neq [Y'']}} \mu(Y'') =$$

$$= \sum_{Y' \subseteq [B]} (-1)^{|Y'|} \binom{|[B]|}{|Y'|} = \sum_{i=0}^{|[B]|} (-1)^i \binom{|[B]|}{i} = 0.$$

□

Теорема 3.5. *Якщо $f(X)$ і $g(X)$ визначені на частково впорядкованій множині $(P(A), \subseteq)$ функції, причому виконується рівність*

$$\sum_{X \subseteq B} f(X) = g(B),$$

то виконується рівність

$$\sum_{X \subseteq B} \mu(X) \cdot g(B - X) = f(B).$$

Доведення. Позаяк

$$g(C - X) = \sum_{Y \subseteq C - X} f(Y),$$

то

$$\sum_{X \subseteq C} g(C - X)\mu(X) = \sum_{X \subseteq C} \mu(X) \sum_{Y \subseteq C - X} f(Y).$$

Групуючи в останньому виразі всі доданки із множником $f(Y)$, матимемо

$$\sum_{Y \subseteq C} f(Y) \sum_{X \subseteq C - Y} \mu(X) = f(C).$$

□

Нехай задано деяке натуральне число

$$n = p_1^{k_1}, \ldots, p_r^{k_r},$$

де $p_i, i = 1, \ldots, r$ – деякі прості числа. Тоді розглянемо частково впорядковану множину всіх підмультимножин мультимножини

$$A = \{p_1^{k_1}, \ldots, p_r^{k_r}\}$$

і міняючи в теоремі 3.5 теоретико-множинні операції $X \subseteq B$ і $B - X$ відповідно на теоретико-числові операції $x|b$ і $b : x$

отримаємо відомий теоретико-числовий варіант теореми обернення Мебіуса.

Якщо, наприклад, у теоремі 3.5 покласти $B = \oslash$, то тоді $X = \oslash$ і рівність

$$\sum_{X \subseteq B} f(X) = g(B)$$

прийме вигляд

$$f(\oslash) = g(\oslash).$$

Позаяк $\mu(\oslash) = 1$, то обернене співвідношення

$$\sum_{X \subseteq B} \mu(X) \cdot g(B - X) = f(B)$$

Прийме вигляд

$$g(\oslash) = f(\oslash).$$

Висновки до розділу 3

В існуючій літературі властивості m-арних арифметичних функцій досліджувалися при допомозі класичного апарату лінійної алгебри та методів комбінаторного аналізу. Застосування до досліджень властивостей цих функцій апарату числення трикутних матриць суттєво спрощує ці дослідження та дозволяє легко описати всі зв'язки між цими функціями в термінах многочленів розбиттів та лінійних рекурентних співвідношень. Ці дослідження наведено у першому підрозділі третього розділу.

У другому підрозділі третього розділу у частково впорядкованій множині – мультибулеані, розглянуто функцію Мебіуса та модифікацію класичної теореми обернення арифметичних функцій. При цьому класична теорема обернення, за деяких умов, випливає із наведеної у цьому розділі теореми.

ВИСНОВКИ

Многочлени розбиттів появлялися епізодично то у алгебрі, то у теорії чисел, то у аналізі, то у комбінаториці. Трохи згодом деякі аналітики досліджували окремі класи многочленів розбиттів – многочлени Белла та Тушара. Однак загальні підходи до вивчення многочленів розбиттів стали можливими після запровадження числення трикутних матриць. З'ясувалося, що парафункції трикутних матриць похилої структури зображують многочлени розбиттів. Тому з'явилася ідея дослідження многочленів розбиттів, що зображуються парафункціями деяких класів трикутних матриць похилої структури. Такими класами є парафункції трикутних матриць похилої структури з першим та двома першими довільними стовпцями. До першого із цих класів належать ряд відомих многочленів розбиттів, що зустрічаються у алгебрі. Прикладом таких многочленів слугують многочлени розбиттів, в яких степеневі суми виражаються через елементарні симетричні многочлени або через повні однорідні симетричні многочлени. Аналогічні приклади можна знайти також у теорії чисел. На жаль, жоден із многочленів розбиттів, що описуються у теоремі про зображення многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць з двома першими довільними стовпцями, досі не зустрічався в існуючій літературі.

У дисертації наведено результати що уточнюють теорему Заторського про зображення многочленів розбиттів парафункціями трикутних матриць похилої структури, проте алгоритми побудови многочленів розбиттів відзначаються складністю за числом операцій. Теорема про взаємно оберенені парафункції трикутних матриць дозволяє будувати взаємно обернені мно-

гочлени розбиттів. Такі пари многочленів розбиттів зустрічалися у теорії симетричних многочленів та теорії чисел. Числення трикутних матриць дозволяє вивчати класи взаємно обернених многочленів розбиттів.

Слід відзначити також той факт, що розкладаючи многочлени розбиттів за елементами останнього рядка, легко будуються лінійні рекурентні співвідношення, які дають ефективні алгоритми побудови многочленів розбиттів. Таким чином, з'являється бієктивний трикутник, вершинами якого є: многочлени розбиттів, парафункції трикутних матриць похилої структури, що їх зображують та лінійні рекурентні співвідношення, що їх генерують.

Числення трикутних матриць застосовується також для дослідження узагальнених арифметичних функцій – m-арних розбиттів та m-арних сум дільників натурального числа, які вивчалися у третьому розділі дисертації. Тут, зокрема, побудовано деяку модифікацію класичної теореми обернення арифметичних функцій.

Розроблені методи у дисертаційній роботі можна використати при подальшому дослідженні многочленів розбиттів, парафункцій трикутних матриць та теоретико-числових функцій. Результати цих досліджень можуть бути використані при читанні лекцій та спецкурсів на механіко-математичних і фізико-математичних факультетах навчальних закладів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Стефлюк С.Д.* Два класи взаємно обернених многочленів розбиття / С.Д. Стефлюк // *Карпат. мат. публ.* — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 145-154.

[2] *Zatorsky R.* On one class of partition polynomials / R. Zatorsky, S.Stefluk // *Algebra and Discrete Math.* — 2013. — V. 16, № 1. — P. 127-133.

[3] *ЗаторськийР.А.* Многочлени розбиттів / Р.А. Заторський, В.М. Пилипів, С.Д. Стефлюк // *Буковин. мат. журнл.* — 2013. — Т.2, № 1. — С. 43-47.

[4] *Stefluk S.* Partition polynomials defined by parafunctions of triangular matrices with arbitrary first two columns / S.D. Stefluk // *Carpath. Math. Publ.* — 2014. — V.6, №2. — P. 367-371.

[5] *Zatorsky R.* Parafunctions of triangular matrices and m-ary partitions of numbers / R.A. Zatorsky, S.D. Stefluk. // *Algebra and Discrete Math.* — 2016. — V.21, № 1. — P. 144-152.

[6] *Заторський Р.А.* Узагальнення арифметичної функції Мебіуса / Р.А. Заторський, С.Д. Стефлюк// *XIV Міжнар. наук. кон-фія ім. акад. Кравчука, 19-21 квітня, 2012, Київ: матеріали конф. Т.2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз.*— К. : НТУУ "КПІ", 2012. — С. 110.

[7] *Stefluk S.* Parafunctions and partition polynomials / S. Stefluk // *IX International Algebraic Conference in Ukraine, 8-*

13 June, 2013, Lviv: book of abstracts. — Lviv, 2013. — P . 185.

[8] *Stefluk S.* Partition polynomial assigned by parafunction of triangular matrices with arbitrary first two columns / S. Stefluk // *XV International scientific M. Kravchuk conference, 15-17 May, 2014, Kyiv: Conference materials. Vol.2. Algebra. Geometry. Analysis.* – K.: NTUU "KPI", 2014. — P. 29.

[9] *Stefluk S.* Partition polynomials / S.D. Stefluk // *X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70-th anniversary of Yu. A. Drozd, 20-27 August, 2015, Odessa: book of abstracts* — Odessa : TES, 2015. — P. 110.

[10] *АйгнерМ.* Комбинаторная теория: Пер. с англ./ М. Айгнер // — М.: Мир, 1982. — 558 с.

[11] *Allouche J.-P.* The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence, in: Ding, C. Helleseth, T., Niederreiter, H. (eds.) Sequences and their aplications / J.-P. Allouche, J. Shallit // *Proceedings of SETA '98, Springer-Verlag.*— 1999. — P. 1-16.

[12] *Andrews G.* Congruence properties of the m-ary partition function / G. Andrews // *J. Number Theory.* — 1971. — №3. — P. 104-110.

[13] *Atiyah M.F.* Introduction to commutative algebra / M.F. Atiyah, I.G. Macdonald // Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.,1969. — 128 p.

[14] Кузьмин О.В. Перечислительные свойства комбинаторных полиномов разбиений / А.А. Балагура,

О.В. Кузьмин // *Дискр. анализ и исслед. операций.* — 2011. — Т.18, № 1. — С. 3-14.

[15] *Bell E.T.* Partition polynomials / E.T. Bell // Ann. Math. — 1927. — № 29. — P. 38-46.

[16] *Ганюшкін О.Г.* До паравизначників і параперманентів трикутних матриць / О.Г. Ганюшкін, Р.А. Заторський, І.І. Ліщинський // *Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки.* — 2005. — Вип. 1. — С. 35 - 41.

[17] *Гой Т.П.* Узагальнений факторіальний степінь та деякі його застосування/ Т.П. Гой, Р.А. Заторський //*Прикарпатський вісник НТШ . Число.* — Т. 1, № 21. — 2013.— С. 9-19.

[18] *Gupta H.* A direct proof of the Churchhouse conjecture concerning binary partitions / H. Gupta // Indian J. Math. — 1976. — Vol. 1, №18. — P. 1-5.

[19] *Gupta H.* A simple proof of the Churchhouse conjecture concerning binary partitions/ H. Gupta // *Indian J. Pure Appl. Math.* — 1972. — Vol. 5, №3. — P. 791-794.

[20] *Gupta H.* Proof of the Churchhouse conjecture concerning binary partitions/ H. Gupta // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1971. — №70. — P. 53-56.

[21] *Eulero L.* Introductio in Analysin Infinitorum / L. Eulero.– Vol. 2, Lausannae: Apud Marcum-Michaelem Bousquet and socios., 1748. — 101 p.

[22] *Eves H.* An introduction to the History of Mathematics/ H. Eves // *University of Maine.* — 1969. — P. 339-340.

[23] *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных / Л. Эйлер. — т. I изд. 2, М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. — 315 с.

[24] *Эндрюс Г.* Теория разбиений / Г. Эндрюс // — Пер. с англ. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 256 с.

[25] *Заторський Р.А.* Про паравизначники та парапермаенти трикутних матриць / Р.А. Заторський // *Математичні студії.* — 2002. — Т.17, №1. — С. 3-17.

[26] *Заторський Р.А.* Параопределители и парапермаенты треугольных матриц. (укр.)/ Р.А. Заторський // *Математические студии, Львовский национальный университет им. И. Франка.* — 2002. — Т.17, №1. — С.45-54.

[27] *Заторський Р.А.* Паравизначники та парапермаенти трикутних матриць / Р .А. Заторський // *Доповіді НАН України.* — 2002. — № 8. — С. 21-25.

[28] *Заторський Р.А.* Про зв'язок детермінантів із парадетермінантами / Р.А. Заторський, І.І. Ліщинський // *Математичні студії.* — 2006.— Т. 25, № 1. — С. 97-102.

[29] *Заторський Р.А.* Парафункції і комбінаторні тотожності / Р.А. Заторський // *Науковий вісник Чернівецького університету. Зб. Наук. Пр. Випуск 336-337. Математика.* — Чернівці: ЧНУ, 2007. — С. 79-84.

[30] *Zatorsky R.A.* Theory of paradeterminants and its applications / R. A. Zatorsky // *Algebra and Discrete Mathematics.* — 2007. — №1. — P. 109-138.

[31] *Заторський Р.А.* Скалярний добуток вектора на парадетермінант трикутної матриці та його застосування / Р.А. Заторський // *Прикарпатський вісник НТШ Число.* — 2008.— Т. 1, №1. — С. 22-30.

[32] *Заторський Р.А.* Парадетермінанти і многочлени розбиттів / Р.А. Заторський // *УМЖ.* – 2008. — Т. 60, №11.— С. 1457-1469.

[33] *Заторський Р.А.* Застосування параперманентів до лінійних рекурентних рівнянь / Р.А. Заторський , І.М. Литвиненко // *Наукові вісті НУТУ "КПІ".* — 2008. — №5. — С. 1-7.

[34] *Заторський Р.А.* Числення трикутних матриць та його застосування / Р.А. Заторський. — Івано-Франківськ: Сімик, 2010. — 508 с.

[35] *Заторський Р.А.* Обернення многочленів розбиттів / Р.А. Заторський // *Всеукраїнська наукова конференція. Прикладні задачі математики. м. Яремче, 13-15 жовтня, 2011 р., Яремче:* мат. конференції. — Івано-Франківськ: ПНУ ім. Стефаника, 2011. — С. 101.

[36] *Заторський Р.А.* Дослідження функцій матриць Хессенберга / Р.А. Заторський // *Карпатські математичні публікації.* — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 49-55.

[37] *Заторський Р.А.* Парафункції матриць похилої структури та многочлени розбиттів/ Р.А. Заторський // *Наук. вісн. ЧНУ. Математика.* — 2011. — Т.1, №4. — С. 59-66.

[38] *Jacobi C.G.* De functionibus alternantibus ... / C.G. Jacobi // — *Grelle's Journal.* — 1841. — Vol. 22. — P. 360-371.

[39] *Young A.* Quantitative substitutional analysis I-IX. — Proc. London Math. Soc., — 1952.

[40] *Кузьмин О.В.* Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов / О.В. Кузьмин // *Дискретная математика.* — 1994. — Т. 6, №3. — С. 39-49.

[41] *Кузьмин О.В.* Полиномы Тушара и их приложения / О.В. Кузьмин , О.В. Леонова // *Дискретная математика.* — 2000. — Т.12, №3. — С. 60-71.

[42] *Кузьмин О.В.* О полиномах разбиений / О.В. Кузьмин, О.В. Леонова // *Дискретная математика.* — 2001. — Т. 13, №2. — С. 144-158.

[43] *Кузьмин О.В.* Об аналитической сопряженности полиномов Тушара и им квазиортогональных / О.В. Кузьмин , О.В. Леонова // *Дискретная математика.* — 2002. — Т. 14, №1. — С. 151-157.

[44] *Кузьмин О.В.* C-полиномы Тушара и им квазиортогональные / О.В. Кузьмин, О.В. Леонова // *Дискретная математика.* — 2005. — Т. 17, №2. — С. 153-159.

[45] *Кузьмин О.В.* Комбинаторные вероятностные задачи дискретной математики / О.В. Кузьмин // г. Иркутск, Издат. Иркут. ун-т, 2006. — 120 с.

[46] *Kachi Y.* On the m-ary partition numbers / Y. Kachi, P. Tzermias // *Algebra and Discrete Mathematics.* — 2015. — Vol. 19, №1. — P. 67-76.

[47] *Knopfmacher A.* Reciprocal sums over partitions and compositions / A. Knopfmacher, J.N. Ridley //*SIAM J. Discrete Math.* — 1993. — Vol. 6, №3. — P. 388-399.

[48] *Calkin N.* Recounting the rationals / N. Calkin, H. Wilf // *Amer. Math. Monthly.* — 2007. — Vol. 4, №107. — P. 360-363.

[49] *Littlewood D.E.* Group characters and algebra / D.E. Littlewood, A.R. Richardson //*Phil. Trans. A .* — 1934. — Vol. 233. — P. 99-141.

[50] *Macmahon P.A.* Combinatory Analysis / P.A. Macmahon. — London: Cambridge Univ. Press, 1915. — 302 p.

[51] *Платонов М.Л.* Комбинаторные числа класса отображений и их приложения/ М.Л. Платонов. — М.:Наука, 1979. — 154 с.

[52] *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества / Дж. Риордан; [перевод з англ. языка (Combinatorial Identites) А.Е. Жуков]. — Москва: Наука, 1982. — 256 с.

[53] *Riordan J.* An Introduction to Combinatorial Analysis / J. Riordan. — New York: Wiley, 1958.

[54] *Rödseth Ö.* Binary partitions revisited / Ö. Rödseth, J.-A. Seller // *J. Combin. Theory Ser. A.* — 2002. — Vol. 1, №98. — P. 33-45.

[55] *Rödseth Ö.* On m-ary partition function congruences: A fresh look at a past problem / Ö. Rödseth, J.-A. Seller// *J. Number Theory.* — 2001. — Vol. 2, №87. — P. 270-281.

[56] *Серре И.А.* Курс высшей алгебры / И.А. Серре. — Второе русское изд. под ред. Л.А. Левенстерна. М.: Изд-во т-ва М.О. Вольф, 1902.

[57] *Schur I.* Über eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen Lassen: dissertation/ Issai Schur. — Berlin, 1901.— 74 s.

[58] *Singh A.N.* On the use of series in Indian Mathematics/ A.N. Singh // *Osiris.* — 1936. — Vol. 1. — P. 606-628.

[59] *Stanley R.P.* Factorization of permutations into $n-$cycles/ R.P. Stanley // *Discrete Mathematics.* — 1981. — Vol. 37. — P. 255-262.

[60] *Touchard J.* Sur les cycles des substitutions/ J. Touchar // *Acta Math.* — 1939. — Vol. 70, №3-4. — P. 243-297

[61] *Faa di Bruno F.*Note sur un nouvelle formule de calcul differentiel / F. Faa di Bruno // *Quarterly J. Math.* — 1857. — Vol. 1. — P. 359-360.

[62] *Fine N.J.* Sums over partitions/ N.J. Fine // *Report of the Institute in the Theory of Numbers, Boulder.* — 1959. — P. 86-94.

[63] *Franklin J.* Sur le developpement du produit infini $(1-x)(1-x^2)\ldots$, / J. Franklin // *Comptes Rendus Acad. Fr.* — 1881. — Vol. 82. — P. 448-450.

[64] *Frobenius F.G.* "Uber die Charactere der symmetrischen Gruppe / F.G. Frobenius // *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — 1900. — S. 516-534.

[65] *Hessenberg K.* Behandlung linearer Eigenwertaufgaben mit Hilfe der Hamilton-Cayleyschen Gleichung / K. Hessenberg. — Dartmstadt, Germany: Technische Hochschule, 1940. — 36 s.

[66] *Холл М.* Комбинаторика / М. Холл;[Пер. с англ.] — М.: Мир, 1970. — 237 с.

[67] *Chrysaphinju O.* On Touchard polynomsals / O. Chrysaphinju //*Discrete Math.* — 1985. — Vol. 54. — P. 143-152.

[68] *Charalambides Ch.* Partition polynomials in fluctuation theory / Ch. Charalambides, O. Chrysaphinju // *Math. Nachr.* — 1982. — Vol. 106. — P. 89-100.

[69] *Wilf H.S.* Generating functionology/ H.S. Wilf. — Philadelphia: Copyright 199.