ВІДГУК

офіційного опонента про дисертаційну роботу *Кузніцької Богданни Миколаївної* **"Обмежені кільця з умовами адекватності"**, подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дослідження, проведені у цій дисертаційній роботі, пов'язані з теорією кілець елементарних дільників. Кільцем елементарних дільників називається кільце, над яким кожна матриця є з властивістю діагональної редукції, тобто еквівалентна до діагональної матриці з подільністю діагональних елементів. Це поняття введено І. Капланським в 1949 р. Проблема полягає в описі кілець елементарних дільників, тобто у встановлені умов, за яких кільце є з діагональною редукцією матриць.

Теорія кілець елементарних дільників розпочинається із відомої статті Х. Сміта, опублікованої у 1861 р., в якій встановлено, що кожна матриця, елементами якої є цілі числа, еквівалентна до канонічної діагональної форми, яку називають нормальною формою Сміта. Кільце цілих чисел стало першим відомим кільцем елементарних дільників. Після цього багато авторів відкривали все нові кільця елементарних дільників. О. Хелмер ввів принципіально новий клас кілець елементарних дільників – адекватні кільця, які є узагальненням кілець головних ідеалів.

Незважаючи на те, що проблемі кілець елементарних дільників понад півтори століття, вона є актуальною і сьогодні. Цій проблемі присвячені праці відомих сучасних авторів: М.І. Дубровіна, А.А. Туганбаєва, львівських алгебраїстів П.С. Казімірського, М.Я. Комарницького, Б.В. Забавського та ін. Загалом проблема опису кілець елементарних дільників на сьогодні нерозв'язана. У дисертаційній роботі Б.М. Кузніцької описані нові класи кілець елементарних дільників, зокрема роздільні та ефективні кільця, які узагальнюють адекватні кільця і є кільцями елементарних дільників.

В останній час у дослідженнях кілець елементарних дільників використовується поняття стабільного рангу кільця, введене Х. Басом у другій половині минулого століття. Це дозволяє отримувати нові результати щодо діагональної редукції матриць. Важливою задачею є встановлення зв'язків стабільних рангів кільця матриць та кільця, над яким розглядаються матриці. Цю задачу досліджував Л.Н. Васерштейн. У дисертації виділена множина матриць стабільного рангу один над кільцями елементарних дільників, які є стабільного рангу два.

Наведений огляд є підставою стверджувати, що тема дисертації та проведені в ній дослідження є *важливими та актуальними*.

Дослідження дисертаційної роботи виконані на кафедрі алгебри і логіки механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка в рамках держбюджетної теми кафедри, яка виконувалась згідно планів наукових робіт з математики у цьому університеті.

Відзначимо найбільш суттєві *нові наукові* результати, одержані автором і викладені у дисертації.

Введено поняття роздільного кільця та кільця роздільного рангу один. Доведено, що комутативне адекватне кільце є роздільним кільцем. Але відомо, що не кожне роздільне кільце є адекватним. Отже, роздільні кільця є розширенням адекватних. Наведено також умови, за яких комутативна область Безу є роздільним кільцем. Встановлено зв'язки між різними типами кілець: адекватними, роздільними, локально роздільними, роздільного рангу один тощо. Доведено, що роздільна область Безу та область Безу роздільного рангу один є кільцями елементарних дільників.

Введено також поняття ефективного кільця, близького до роздільного кільця. Встановлено властивості таких кілець та їх елементів. Основною властивістю є така: ефективне кільце є кільцем елементарних дільників.

Ефективним засобом при дослідженні кілець елементарних дільників є поняття стабільного рангу. У четвертому останньому розділі дисертації розглянуто зв'язки між стабільними рангами кільця і множини матриць над ним. Л.Н. Васерштейн встановив формулу, яка пов'язує стабільні ранги кільця та кільця матриць над ним. З неї випливає, що стабільний ранг кільця матриць дорівнює один, якщо тільки кільце є стабільного рангу один. У цьому розділі дисертаційної роботи розглянуто множину повних матриць другого порядку над кільцем елементарних дільників, тобто таких, що ідеал породжений їх елементами збігається з кільцем. Зокрема доведено, що стабільний ранг цієї множини матриць дорівнює один. Зауважимо, що стабільний ранг кільця елементарних дільників дорівнює два.

Є й інші результати у дисертаційній роботі, які заслуговують на увагу.

Усі наукові положення роботи *обґрунтовані* строгими математичними доведеннями, *апробовані* на конференціях та семінарах, тому їх *достовірність* не викликає сумнівів. Наукові результати дисертації *повністю опубліковано* у 5 статтях у фахових виданнях, з яких 2 – у фахових виданнях, які включені до наукометричної бази даних і в матеріалах та тезах наукових конференцій. Вони доповідались та обговорювались на багатьох наукових математичних конференціях та семінарах.

Дисертаційна робота є теоретичним дослідженням. Отримані у ній результати можуть знайти застосування у теорії кілець та модулів, у лінійній алгебрі та в інших суміжних розділах математики. Розроблені методи та одержані результати дисертації можна пропонувати використовувати у дослідженнях з теорії кілець та модулів, теорії зображень, які проводяться у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Інституті математики НАН України, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Ужгородському національному університеті та в інших наукових установах і навчальних закладах України.

Робота виконана на належному науковому рівні. Дисертація та автореферат дисертації оформлені згідно чинних вимог. За своїм *науковим спрямуванням* дисертація Б.М. Кузніцької відповідає спеціальності 01.01.06 –

алгебра та теорія чисел. Зміст *автореферату* дисертації повністю відображає основні її положення.

До *змісту дисертації зауважень* немає.

Зауваження до структури, викладу та оформлення роботи:

1) Огляд літератури та результатів за темою дисертації є неповним. Зокрема, не наведені результати та праці з теорії кілець елементарних дільників та узагальнених адекватних кілець професора М.Я. Комарницького, які стосуються теми цієї дисертації. Наприклад, Комарницкий М.Я. *Коммутативные адекватные области Безу и кольца элементарных делителей.* Алгебраические исследования. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 97–113.
2) Розділи 2 і 3, на мою думку, можна об'єднати. У третьому розділі, який складається лише з одного підрозділу (не включаючи висновків), введено поняття ефективних кілець, які є кільцями елементарних дільників і вони близькі за властивостями до роздільних кілець, які вивчаються у другому розділі.
3) Зауваження щодо використаної термінології. На стор. 18–19 наведено означення кільця елементарних дільників із статті І. Капланського [70] і після нього зазначено "… елементи $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ називають елементарними дільниками матриці… ". У цій же статті І. Капланського, стор. 481 діагональні елементи $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ нормальної форми Сміта матриці названі інваріантними множниками ("invariant factors"). Так само, інваріантними множниками ці діагональні елементи називають у відомих монографіях, наприклад: Newman M. Integral matrices. New York: Academic Press, 1972, стор. 28–29; Brown W. C. Matrices over commutative rings. – New York:Marcel Dekker, Inc., 1993, стор. 195–196; Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975 (переклад) стор. 362 та ін. Елементарними дільниками матриці називають степені нерозкладних множників $e_{ij}^{s_{ij}}$ у розкладах $\varepsilon_i = e_{i1}^{s_{i1}}\cdots e_{ik}^{s_{ik}}$ інваріантних множників ε_i.
4) Незрозуміле формулювання теореми 2.3 (стор.50, 64): "Роздільна область – це область ... ". Формулювання схоже на означення. Можна так: "Нехай область є роздільною. Тоді … ".
5) Вживаються слова у невластивих їм значеннях:
   а) " … матриця приводиться до канонічного діагонального вигляду … " (стор. 19 та ін.), замість " … матриця зводиться … ";
   б) " … матриці … володіють канонічною діагональною редукцією …" (стор. 21 та ін.), замість " … матриці … з канонічною діагональною редукцією … ";
   в) "В силу обмежень … " (стор 102), замість "Завдяки обмеженням … " та ін.

Зустрічаються також інші невдалі висловлювання, неточності та описки.

Наведені недоліки є переважно технічного характеру і не впливають на результати і загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Таким чином, на основі наведеного аналізу роботи можна зробити такий *загальний висновок*. Дисертаційна робота є завершеною науковою працею, що виконана на актуальну тему і містить нові науково обґрунтовані теоретичні результати, які в сукупності є суттєвим вкладом у теорію кілець та модулів, лінійну алгебру та інші розділи математики.

У дисертації на основі введених нових понять роздільних кілець, кілець роздільного рангу один, ефективних кілець описано нові класи кілець елементарних дільників. Ці результати є важливими для подальшого розвитку теорії кілець і модулів, зокрема теорії кілець елементарних дільників.

Усі викладені в дисертації результати повністю і вчасно опубліковані автором у фахових виданнях і пройшли належну апробацію. Отже, дисертаційна робота *"Обмежені кільця з умовами адекватності"* відповідає всім вимогам чинного законодавства щодо дисертацій на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, а її автор – *Кузніцька Богданна Миколаївна* заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент:
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач відділу алгебри
Інституту прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України В.М. Петричкович

Підпис В.М. Петричковича засвідчую

Вчений секретар Інституту
прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України В.О. Міщенко

19.10.2015 р

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника вх. ПНУ 0502-11/436 23.10.15